Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo

4. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mi. 14.05.2014 bis 14:15 Uhr im EW 229 (Übungen)
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

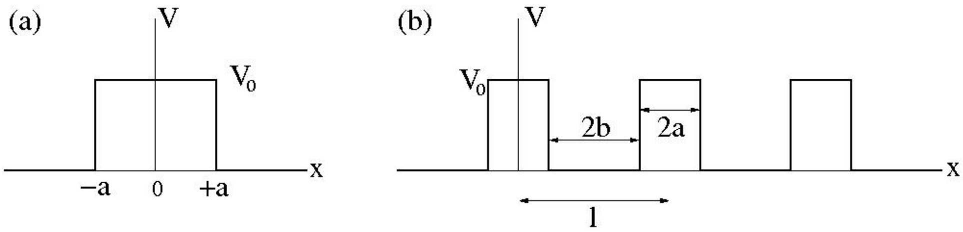
Aufgabe 9 (12 Punkte): *Orthonormalität der Blochfunktionen*

Zeigen Sie die Orthonormalität der Blochfunktionen, $\phi_{\lambda\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = V^{-1/2}u_{\lambda\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$:

$$\int d^3r\phi^*_{\lambda\mathbf{k}}(\mathbf{r})\phi_{\lambda'\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'},$$

mit Hilfe aus der Vorlesung bekannter Eigenschaften.

Aufgabe 10 (15 Punkte): *Das Kronig-Penney-Modell*



Sei eine V_0-hoch und $2a$-weit Potentialschwelle (Fig. (a)). Die Lösung der entsprechenden 1D-Schrödinger-Gleichung für Energie $E < V_0$ lautet

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{iqx} + Be^{-iqx} & x < -a \\ Ce^{-Qx} + De^{Qx} & -a < x < a \\ Fe^{iqx} + Ge^{-iqx} & x > a \end{cases},$$

wo $\hbar q = \sqrt{2mE}$ und $\hbar Q = \sqrt{2m(V_0 - E)}$ für ein Teilchen der Masse m.

- Mit Hilfe der Randbedingungen für $x = \pm a$ zeigen Sie, dass die Koeffizienten außerhalb der Schwelle durch

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 & i\beta_2 \\ -i\beta_2 & \alpha_1 - i\beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

  miteinander zusammenhangen, wo $\alpha_1 + i\beta_1 = \left(\cosh 2Qa + \frac{i\epsilon}{2}\sinh 2Qa\right)e^{2iqa}$, $\beta_2 = \frac{\eta}{2}\sinh 2Qa$, $\epsilon = (Q^2 - q^2)/qQ$, und $\eta = (Q^2 + q^2)/qQ$.

Betrachten Sie jetzt die periodische Version vom selben Potential (Fig. (b)), wo der Tal $2b$-weit ist und die Einheitszelle eine Länge $l = 2(a + b)$ hat. Im n-ten Tal lautet die Wellenfunktion

$$\psi(x) = A_n e^{iq(x-nl)} + B_n e^{-iq(x-nl)},$$

für $a - l < x - nl < -a$.

- Zeigen Sie, dass die Koeffizienten von aufeinander folgenden Täler gemäß den folgenden Ausdrücken zusammenhangen

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}; \quad \text{mit} \quad P = \begin{pmatrix} (\alpha_1 - i\beta_1)e^{iql} & -i\beta_2 e^{iql} \\ i\beta_2 e^{-iql} & (\alpha_1 + i\beta_1)e^{-iql} \end{pmatrix}.$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

- Mit Hilfe der Normalisierung der Wellenfunktion zeigen Sie, dass die Eigenwerte der P-Matrix $p_\pm = e^{\pm ikl}$ lauten, wo k ein realer Parameter mit

$$\cos kl = \cosh 2Qa \cos 2qb + \tfrac{\epsilon}{2} \sinh 2Qa \sin 2qb$$

und $E < V_0$ ist.

- Zeigen Sie, dass die analoge Bedingung für $E > V_0$

$$\cos kl = \cos 2q'a \cos 2qb - \frac{{q'}^2 + q^2}{2q'q} \sin 2q'a \sin 2qb$$

lautet, mit $\hbar q' = \sqrt{2m(E - V_0)}$.

- Skizzen Sie die Dispersionsrelation E vs. k, für Parameter $a = b = 1$ und $2mV_0/\hbar^2 = \pi^2/4$. Erklären Sie, was bei $2qb = N\pi$ für $E < V_0$ und bei $2q'a + 2qb = N\pi$ für $E > V_0$ entsteht (N Ganzzahl).