Vorlesung: Dr. Philipp Hövel, PD Dr. Kathy Lüdge
Übung: Dr. Vitaly Belik

5. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi. 28.05.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Euler-Methode für Delay-Differenzialgleichungen*

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \quad \lambda\, x(t) + \omega\, y(t) - K\,[x(t) - x(t-\tau)],\\ \dot{y}(t) &= -\omega\, x(t) + \lambda\, y(t) - K\,[y(t) - y(t-\tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.

2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differenzialgleichung

  $$\dot{X} = f[X(t),\, X(t-\tau)]$$

  ist gegeben durch

  $$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n,\, X_{n-\Delta}],$$

  wobei $\Delta = \tau/dt$.

- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind fangen Sie von vorne an).
  Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation.

- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.

- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Optimalkontrolle*
Ein Raum soll von $0°$C zum Zeitpunkt $t = 0$ auf ungefähr $20°$C zum Zeitpunkt $t = t_f$ geheizt werden. Die Änderung der Temperatur T wird dabei durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$\dot{T}(t) = -aT(t) + bu(t), \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei a die Wärmeverlustrate ist und $u(t)$ die pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge.

1. Finden Sie das optimale u_*, das das folgende Kostenfunktional minimiert:

$$\mathcal{I}[T(t), u(t)] = \frac{s}{2}(T(t_f) - 20)^2 + 1/2 \int_0^{t_f} u(t)^2 dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

   Interpretieren Sie auch die einzelnen Terme von $\mathcal{I}$.

2. Finden Sie das zu $u_*(t)$ zugehörige $T_*(t)$, das Gl. (1) löst. Bestimmen Sie auch alle vorkommenden Integrationskonstanten.
   Zur Kontrolle: Die Lösung lautet

$$T_*(t) = \frac{20sb^2 \sinh(at)}{ae^{at_f} + sb^2 \sinh(at_f)}.$$

3. Plotten Sie die Lösung für geeignete Parameter und diskutieren Sie die Lösung; insbesondere für große und kleine Werte für s.

4. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall aus der Übung.