Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

1. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 05.05.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 0 (0 Punkte): *Wiederholung zum Selbststudium*

Wiederholen Sie für sich die folgenden Themen:

1. Ableitung der Wellengleichung in Vakuum und Materie
2. Elektron-Licht WW: Von der minimalen Wechselwirkung im Hamiltonian zur Dipolkopplung Kopplung durch eine kanonische Transformation.
3. Koordinatentransformationen: Wie transformieren sich Ableitungen bei linearen Koordinatentransformationen?

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Lösung der paraxialen Wellengleichung für einen Gaußstrahl*

Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion der Lösung der in der Vorlesung diskutierten paraxialen Wellengleichung für einen Gaußstrahl.

1. Zeigen Sie durch eine Fouriertransformation für $r_\parallel-$ Richtung, dass für das Fourier transformierte Feld gilt:
$$\left(\partial_\zeta - \frac{1}{2\imath k_L}\mathbf{q}_\parallel^2\right)\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_\parallel,\zeta) = 0 \tag{1}$$
2. Die Anfangsverteilung des Gaußstrahls ist gegeben als $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\parallel,0) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}}$. Zeigen Sie: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_\parallel,0) = \mathbf{E}_0 \pi w_0^2 e^{-\frac{q_\parallel^2}{4}w_0^2}$
3. Zeigen Sie, dass allgemein: $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_\parallel,\zeta) = e^{\frac{q_\parallel^2}{2\imath k_L}\zeta}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{q}_\parallel,0)$ gilt.
4. Verwenden Sie das Ergebnis um die Lösung im Ortsraum:
$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\parallel,\zeta) = \frac{\exp\left(-\frac{r_\parallel^2}{w_0^2(1+2\imath\zeta/(k_L w_0^2))}\right)}{1+2\imath\zeta/(k_L w_0^2)} \tag{2}$$
herzuleiten. Plotten Sie das Ergebnis bei $\lambda = 500\mathrm{nm}$ und einer Pulsbreite $w_0 = 4000\mathrm{nm}$ sinnvoll über die Koordinaten $r_\parallel$ und ζ.
5. Für spezielle transversale Randbedingungen werden auch die folgenden Strahlen untersucht: $\tilde{\mathbf{E}}_{nm}(\mathbf{r}_\parallel,\zeta) \propto \partial_x^n\partial_y^m\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\parallel,\zeta)\omega_0^{n+m}$ (siehe Diskussion in der Vorlesung). Plotten Sie die Moden E^{11}, E^{10}, E^{01}, E^{00} über x und y.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Dichtematrixgleichungen*

1. Leiten Sie aus der Liouvillegleichung $\partial_t\rho = \frac{\imath}{\hbar}[\rho, H]_-$ mit $H = H_0 + H_{ww}$, die Dichtematrixgleichungen:

$$\partial_t\rho_{nm} = \frac{\imath}{\hbar}(E_m - E_n)\rho_{nm} + \frac{\imath}{\hbar}\sum_h \rho_{nh}H^{hm}_{WW} - \frac{\imath}{\hbar}\sum_h H^{nh}_{WW}\rho_{hm} \tag{3}$$

   für $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$, wobei $|n\rangle$ eine ONB ist mit $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$. Außerdem ist $H^{nh}_{WW} = \langle n|H_{WW}|h\rangle$.

2. Analog dazu leiten Sie aus der Schrödingergleichung $\imath\hbar\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$, die Bewegungsgleichung für die Entwickelungskoeffizienten $c_n(t)$ für den Ansatz $|\Psi\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$.

3. Wie hängen die Lösungen aus 2 mit der Dichtematrix aus 1 zusammen?

4. Leiten Sie für den Spezialfall von zwei Niveaus $|1\rangle$, $|2\rangle$, die Dichtematrixgleichungen für ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12} und ρ_{21} auf. Nutzen Sie dabei auftretende Symmetrien. ($H^{11}_{WW} = H^{22}_{WW} = 0$.)

5. Die Liouville von Neumann kann durch Lindbladoperatoren, die die Dissipation beschreiben ergänzt werden: $\partial_t\rho = \frac{\imath}{\hbar}[\rho, H]_- + \mathcal{L}\rho$, diese haben die allgemeine Form $\mathcal{L}\rho = \sum_k \frac{\gamma_k}{2}(2A_k\rho A_k^\dagger - A_k^\dagger A_k\rho - \rho A_k^\dagger A_k)$. Leiten Sie die dissipativen Terme für den Zweiniveausystemfall, also für die Gleichungen von ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12} und ρ_{21}, für den spontanen Zerfall $A^{sp} = |1\rangle\langle 2|$ mit γ_{sp} und für pure dephasing $A^{pure} = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ her.

6. Begründen Sie aus den vorherigen Ergebnissen, warum es notwendig ist mit der Dichtematrix zu rechnen und warum die Schrödingergleichung nicht ohne weiteres ausreichend für die Beschreibung ist.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

Vorlesung:
- Donnerstag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.
- Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Appel.

Übung:
- Montag 16:00 Uhr – 18:00 Uhr im EW 203, Richter.

Anmeldung: Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung "Theoretische Physik VI: Theoretische Optik" erfolgt über das Moseskontosystem: https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto.
Für Nachmeldungen bitte den Assistenten ansprechen.

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter http://www.itp.tu-berlin.de/?145993

Vorläufige Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronischen Abgaben akzeptiert.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Scully, Zubairy, Quantum optics (Cambridge)
- Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford)
- Allen, Eberly, Optical Resonances and two-level atoms (Dover)
- Mandel, Non-linear Optics (Wiley-VCh)
- Born, Wolf, Theoretische Optik (Cambridge)
- Fox, Quantum Optics (Oxford)
- Schubert, Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics (Wiley)
- Römer, Theoretical Optics (Wiley)