Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

2. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 12.05.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Stromdichte und Wignerverteilung*

Gegeben ist die Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathrm{r},t) = \frac{q}{2}\Psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\mathbf{p}}{m_{eff}}\Psi(\mathbf{r},t) + c.c.. \tag{1}$$

Wir betrachten frei bewegliche Ladungen in einem Volumen V. Zur Beschreibung des Systems entwickeln wir die Wellenfunktionen nach ebenen Wellen: $\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k c_k e^{\imath\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, ferner definieren wir die Elemente der Dichtematrix für diesen reinen Zustand als $\rho_{k'k} = c^*_{k'}c_k$.

1. Drücken Sie die Stromdichte sinnvoll unter Verwendung von $\rho_{k'k}$ aus.

2. Zeigen Sie, dass man die Stromdichte, mit Hilfe der Wignerverteilung

$$\rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \sum_Q e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}}\rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} \tag{2}$$

folgendermaßen darstellen kann:

$$\mathrm{j}(\mathrm{r}) = \frac{q}{V}\sum_q \frac{\hbar\mathbf{q}}{m_{eff}}\rho_q(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 2 (14 Punkte): *Berechnung der Stromdichte über Dichtematrixgleichungen*
Ziel dieser Aufgabe ist die Ableitung von Bewegungsgleichungen der Wignerverteilung ausgehend von den Dichtematrixgleichungen. Die Dichtematrixgleichungen haben die Form:

$$\partial_t \rho_{lm} = \imath\omega_{lm}\rho_{lm} - \imath \sum_n \left(\Omega^*_{ln}\rho_{nm} - \Omega_{mn}\rho_{ln}\right) \tag{4}$$

Dabei wird $\omega_{lm} = \varepsilon_l/\hbar - \varepsilon_m/\hbar$ durch die Eigenenergien ε_l, ε_m der Zustände definiert. Ferner ist:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}V \varphi^*_i(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}\varphi_j(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Wir verwenden im folgenden wie in Aufgabe 1 ebene Wellen als Orthonormalbasis. Also unsere Indices l, m, i, j werden durch Wellenvektoren z.B. $\mathbf{k}$ (d.h. die Quantenzahlen der ebenen Wellen) ersetzt.

1. Schreiben Sie die Dichtematrixgleichung für $\rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}$ auf.

2. Formen Sie die Gleichung für $\rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}}$ in eine Gleichung für die Wignerverteilung $\rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ um.

3. Zeigen Sie, dass der erste Term (rhs Gl. (4)) in der Gleichung für $\rho_q(\mathbf{r})$, umgeschrieben werden kann in

$$-\imath \sum_{\mathbf{Q}} e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \omega_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} \rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} = \frac{\hbar}{m_{eff}} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}). \tag{6}$$

4. Zeigen Sie das der zweite Term in der Gleichung für $\rho_q(\mathbf{r})$, umgeschrieben werden kann

$$-\imath \sum_{\mathbf{Qk}} e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \Omega^*_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} = q \sum_{\mathbf{Q}} e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2}} \rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} \tag{7}$$

   Bei der Rechnung wird als Näherung angenommen, dass sich das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ nur schwach um den Ort der Verteilung ändert. Analog dazu zeigen Sie, die Identität für den Term:

$$\imath \sum_{\mathbf{Qk}} e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \Omega_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{k}} = q \sum_{\mathbf{Q}} e^{-\imath\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} \rho_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{Q}}{2},\mathbf{q}-\frac{\mathbf{Q}}{2}} \tag{8}$$

5. Aus den Teilergebnissen leiten Sie die angestrebte Form der Gleichung für die Wignerverteilung her:

$$\partial_t \rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar\mathbf{q}}{m_{eff}} \nabla_{\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) - \frac{q}{\hbar} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}). \tag{9}$$

6. Interpretieren Sie die einzelnen Terme der Gleichung.