Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

5. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 2.06.2014 in der Übung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 1 (14 Punkte): *Kohärente Zustände im Ortsraum und in Wignerdarstellung*
Wie in der Vorlesung und Übung gezeigt läßt sich der kohärente Zustand im Ortsraum für einen Hamiltonian $H = p^2/2 + \omega^2/2x^2$ schreiben als:

$$\Psi_{coh}(x,t) = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp(-\frac{\kappa^2}{2}(x-\bar{x}(t))^2)\exp(\imath\bar{p}(t)x/\hbar)\exp(-\imath[\phi_{zp}(t)+A_\Delta(t)]) \quad (1)$$

$$\bar{x}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\kappa}\mathrm{Re}(\alpha e^{-\imath\omega t}) \quad (2)$$

$$\bar{p}(t) = \hbar\kappa\sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha e^{-\imath\omega t}) \quad (3)$$

sowie $A_\Delta(t) = \mathrm{Re}(\alpha e^{-\imath\omega t})\mathrm{Im}(\alpha e^{-\imath\omega t})$ und $\phi_{zp}(t) = \omega t/2$ und $\kappa = (\omega/\hbar)^{1/2}$.

1. Plotten Sie das Betragsquadrat geeigent über x und t und interpretieren und beschreiben Sie das Ergebnis.

2. Berechnen Sie die Wellenfunktion für $t = 0$ als Vorbereitung für die weitere Berechung.

3. Berechnen Sie die Wignerverteilung $W(x,p,t)$ des kohärenten Zustandes bei $t = 0$:

$$W(x,p,0) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\zeta \exp\left(-\frac{\imath}{\hbar}p\zeta\right)\Psi^*\left(x-\frac{1}{2}\zeta,0\right)\Psi\left(x+\frac{1}{2}\zeta,0\right). \quad (4)$$

4. Quanten-Liouville Gleichung: Für die Wignerverteilung gilt die Quanten-Liouville Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx}\frac{\partial}{\partial p}\right)W(x,p,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l(\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!}\frac{d^{2l+1}U(x)}{dx^{2l+1}}\frac{\partial^{2l+1}}{dp^{2l+1}}W(x,p,t) \quad (5)$$

zeigen, Sie dass sich diese vereinfacht zu:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + p\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx}\frac{\partial}{\partial p}\right)W(x,p,t) = 0 \quad (6)$$

für ein harmonisches Potential $U(x) = \omega^2/2x^2$.

5. Zeigen Sie durch Einsetzen und Überprüfen der Anfangsbedingungen, dass für unser Problem der Ansatz $W(x_0(x,p,t), p_0(x,p,t))$ die Quanten-Liouvillegleichung löst. Wobei $x_0(x,p,t) = \cos(\omega t)x - \sin(\omega t)\frac{p}{\hbar\kappa\kappa}$ und $p_0(x,p,t) = \sin(\omega t)\kappa x\hbar\kappa + \cos(\omega t)p$ sind.

6. Plotten Sie die Wignerverteilung $W(x,p,t)$ geeignet über x, p für $t = 0$, $\omega t = \pi/2$, $\omega t = \pi$, $\omega t = 3\pi/2$ und interpretieren und beschreiben Sie die Plots.

7. Plotten Sie ferner $W(x,\bar{p}(t),t)$ über x und t und $W(\bar{x}(t),p,t)$ über p und t inklusive Interpretation.