Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Heiko Appel
Dr. Marten Richter

7. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mo. 23.06.2014 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreier- oder Vierergruppen.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Zweiphotonenwellenfunktion*

In dieser Aufgabe wird die Präparation eines Zweiphotonenzustandes durch Zerfall in einem Dreiniveausystem betrachtet. Gegeben seinen die drei Zustände a, b und c mit den Energien $\hbar\omega_a$, $\hbar\omega_b$ und $\hbar\omega_c$, wobei $\omega_a > \omega_b > \omega_c$ gilt. Wir verwenden im folgenden das Wechselwirkungsbild. Als Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators werden die optischen Übergänge zwischen den Niveaus verwendet:

$$\begin{aligned} H_{int} &= \hbar \sum_{\mathbf{k}} g^*_{a,\mathbf{k}} \sigma^{(1)}_+ a_{\mathbf{k}} e^{\imath(\omega_{ab}-\nu_{\mathbf{k}})t} + h.c. \\ & \hbar \sum_{\mathbf{q}} g^*_{b,\mathbf{q}} \sigma^{(2)}_+ a_{\mathbf{q}} e^{\imath(\omega_{bc}-\nu_{\mathbf{q}})t} + h.c.. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei ist $\sigma^{(1)}_+ = |a\rangle\langle b|$ und $\sigma^{(2)}_+ = |b\rangle\langle c|$. Dabei sind $\hbar\nu_{\mathbf{k}}$, $\hbar\nu_{\mathbf{q}}$ die Energien der emittierten Photonen mit Wellenvektor $\mathbf{k}$, $\mathbf{q}$. Zu Beginn befinde sich kein Photon im System und der elektronische Anteil sei im Zustand a. In diesem Fall ist der Ansatz:

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}}(t)|b,1_{\mathbf{k}}\rangle + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)|c,1_{\mathbf{k}},1_{\mathbf{q}}\rangle \tag{2}$$

gerechtfertigt wobei die Koeffizienten zum Anfangszeitpunkt durch $c_a(t=0)=1$, $c_{b,\mathbf{k}}(t=0)=0$ und $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t=0)=0$ gegeben sind.

1. Leiten Sie Bewegungsgleichungen in der Zeit für die Koeffizienten $c_a(t)$, $c_{b,\mathbf{k}}(t)$ und $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$ ab.
2. In der Vorlesung wurde die Herleitung der Raten für die spontane Photonemission über die Wigner-Weisskopf Näherung eingeführt. Benutzen Sie das Ergebnis aus der Vorlesung in dem Sie in der Gleichung für $c_a(t)$ und $c_{b,\mathbf{k}}(t)$, die folgenden Ersetzungen durchführen:

$$\begin{aligned} -\imath \sum_{\mathbf{k}} g^*_{a,\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}} e^{\imath(\omega_{ab}-\nu_{\mathbf{k}})t} &= -\frac{\Gamma_a}{2} c_a \\ -\imath \sum_{\mathbf{q}} g^*_{b,\mathbf{q}} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}} e^{\imath(\omega_{bc}-\nu_{\mathbf{q}})t} &= -\frac{\Gamma_b}{2} c_{b,\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{3}$$

3. Ziel ist es nun $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$ zu bestimmen. Lösen Sie das Gleichungssystem und finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$ bei dem die anderen Koeffizienten durch Lösung der Gleichungen eliminiert wurden.
4. Berechnen Sie $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$ für $t \to \infty$.
5. Zeigen Sie, dass die photonische Zweiphotonenwellenfunktion $|\gamma,\phi\rangle$ für $t\to\infty$, die folgende Form annimmt:

$$|\gamma,\phi\rangle = -\sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{g_{a,\mathbf{k}} g_{b,\mathbf{q}}}{[\imath(\nu_{\mathbf{k}}+\nu_{\mathbf{q}}-\omega_{ac}) - \Gamma_a/2][\imath(\nu_{\mathbf{q}}-\omega_{bc}) - \Gamma_b/2]} |1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{q}}\rangle. \tag{4}$$