Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Torben Winzer, Samuel Brem BSc, Henrik Kowalski BSc, Sina Böhling, Jonas Rezacek

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS 2015

Abgabe: Fr. 03.07.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Die Korrekturen können am Mo. 06.07. ab 12:00 im EW 060 abgeholt werden.

Aufgabe (30): *Taylorreihen*
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe. Sie können einen Entwicklungspunkt x_0 wählen.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$

(b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

(c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

(d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Aufgabe (31): *Eigenwerte und Eigenvektoren*

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 \\ 0 & \sin\Theta \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Aufgabe (32): *Differentialgleichungen*
Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

$$y' = \frac{x^2}{\sin y} \quad , y(0) = \frac{\pi}{3} \tag{1}$$

$$2y'' + 5y = 0 \quad , y(0) = 1, y'(0) = 2, \tag{2}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad , y(0) = 2, y'(0) = 3, \tag{3}$$

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = t \quad , y(0) = 1, \dot{y}(0) = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$y'' + \gamma y' + \omega^2 y = 0 \quad , y(t_0) = \alpha, \dot{y}(t_0) = \beta. \tag{5}$$

Aufgabe (33): *Fourierreihen*
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourierreihe.

(a) $f(x) = x$ für $x \in [0, 2\pi]$

(b) $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$

(c) $f(x) = x(\pi - x)$ für $0 \leq x \leq \pi$ mit ungerader Fortsetzung in $[-\pi, 0]$

(d) $f(x) = x^2$ für $x \in [0, \pi]$ gerade fortgesetzt auf $[-\pi, 0]$

(e) $f(x) = x^2$ für $x \in [0, \pi]$ ungerade fortgesetzt auf $[-\pi, 0]$

Aufgabe (34): *Schwingungsfrequenzen eines Moleküls mit zwei Massen*
(3 Bonuspunkte) Ein einfaches Modell für ein zweiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung zweier Massepunkte, die durch eine masselose Feder miteinander verbunden sind. Berechnen Sie die Eigenschwingungen des Systems für den Fall zweier gleicher Massen m. Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \text{ und } m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \tag{6}$$

ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

Aufgabe (35): *Fourier-Transformation*

(1) **(1+2+1 Bonuspunkte)** Berechnen Sie die **Fouriertransformierte** der Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} \frac{2c}{T} t & 0 \le t \le \frac{T}{2}, \\ \frac{2c}{T}(T-t) & \frac{T}{2} < t < T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(t) = cos(\Omega t)$$

(2) **(3 Bonuspunkte)** Lösen Sie die **Diffusionsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$

auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ mit Hilfe der Fouriertransformation.
Als Anfangskonzentration wird die Verteilung $n(x,0) = n_0\, \delta(x)$ angenommen. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe (36): *Bogenlänge einer Zykloide*

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei eine Kurve durch die Abbildung

$$\begin{aligned} c : (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \frac{1}{2}(t + \sin t, 1 + \cos t) \end{aligned}$$

gegeben. Eine solche Kurve heißt *Zykloide*.

1. **(1 Bonuspunkt)** Berechnen Sie den Tangentialvektor der Kurve, also die Geschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt im Definintionsintervall.
2. **(2 Bonuspunkte)** Berechnen Sie die Bogenlänge $L[t_0]$ der Kurve im Intervall $(-\pi, t_0)$ für $t_0 < \pi$. Wie lang ist die gesamte Kurve? *Hinweis:* $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
3. **(1 Bonuspunkt)** Zeigen Sie, dass die Beschleunigung den Betrag 1/2 hat.

Aufgabe (37): *Koordinatensysteme*
Wir definieren die Koordinaten (λ, φ, ψ) $(\lambda \in \mathbb{R}; \varphi, \psi \in (-\pi, +\pi))$ durch $x = \mathrm{e}^\lambda \cos\varphi$, $y = \mathrm{e}^\lambda \sin\varphi$ und $z = \tan\psi$, wobei (x, y, z) die kartesischen Koordinaten bezeichnen.

(a) **(2 Bonuspunkte)** Berechnen Sie die normierte Koordinatenbasis.

(b) **(1 Bonuspunkt)** Zeigen Sie, dass es sich um eine orthogonale Basis handelt.

(c) **(1 Bonuspunkt)** Berechnen Sie den Gradienten ∇U in diesen Koordinaten.