

Prof. Dr. Tobias Brandes

Dr. Javier Cerrillo, Dr. Torben Winzer, Samuel Brem BSc, Henrik Kowalski BSc, Sina Böhling, Jonas Rezacek

**3. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS 2015****Abgabe: Fr. 15.05.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude***Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.***Aufgabe 6 (4 Punkte): Vermehrung von Fruchtfliegen**Um 1920 stellte R. Pearl fest, dass die Änderungsrate  $\frac{dp}{dt}$  einer Population der Fruchtfliegen *Drosophila* mit der Populationsgröße  $p(t)$  über die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2 \quad (\text{mit } \alpha, \beta \geq 0)$$

zusammenhängt. Zeigen Sie, dass die Population gegen eine stationäre Gleichgewichtsgröße  $p_\infty$  strebt und berechnen Sie diese.**Tipp:** Verwenden Sie zunächst die Transformation  $p = \frac{1}{z}$ , um die Gleichung in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen.**Aufgabe 7 (10 Punkte): RC-Stromkreis**Betrachten Sie einen Stromkreis mit dem Widerstand  $R$ , der Kapazität  $C$  und der Spannung  $U$  in einer Reihenschaltung. Beim Widerstand  $R$  fällt eine Spannung  $U = R \cdot I$  ab, wobei  $I$  die Stromstärke im Kreis ist. Die Kapazität  $C$  kann eine Ladung  $Q = U \cdot C$  fassen.

1. (2 Punkte) Finden Sie die inhomogene Differentialgleichung für die Ladung  $Q(t)$  in der Kapazität.
2. (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung für den homogenen Fall.

Berechnen Sie  $Q(t)$  mit Hilfe des Propagators ( $Q_h(t; t')$ , siehe Vorlesungsskript) der Differentialgleichung bei

3. (3 Punkte) konstanter Spannung  $U$  und
4. (3 Punkte) alternierender Spannung  $U = U_0 \sin(\omega t)$ .

**Aufgabe 8 (8 Punkte): Rabi-Oszillationen**In der Quantentheorie kann ein isoliertes gebundenes Elektron nur diskrete Energieniveaus annehmen. Der Zustand  $|\Psi(t)\rangle$  des Elektrons wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$(1) \quad \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \frac{-i}{\hbar} H |\Psi(t)\rangle$$

beschrieben, welche ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ist. Betrachten Sie die untersten beiden Niveaus des Valenzelektrons eines Natrium-Atoms. Der Zustandsvektor  $|\Psi(t)\rangle$  reduziert sich dann zu einem zweikomponentigen Vektor

$$(2) \quad |\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponenten  $\psi_1(t)$  und  $\psi_2(t)$  möglicherweise auch komplexe Zahlen sein können. Durch Bestrahlung mit Laserlicht kann ein Übergang des Elektrons zwischen den Niveaus induziert werden. Diese Wechselwirkung wird durch den Hamiltonian

$$(3) \quad H = \hbar \Delta \sigma_z + \hbar \Omega \sigma_x = \hbar \begin{pmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{pmatrix}$$

### 3. Übung MM SS 2015

beschrieben. Dabei ist  $2\Delta$  die Verstimmung zwischen der Laserfrequenz und der Übergangsenergie und  $\Omega$  ist proportional zur Intensität des Lasers.

1. (4 Punkte) Finden Sie eine allgemeine Lösung für  $|\Psi(t)\rangle$ .
2. (2 Punkte) Berechnen Sie die erste Komponente  $\psi_1(t)$  für den Fall  $\Delta = 0$  und die Anfangsbedingung  $|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
3. (2 Bonus Punkte) Stellen Sie das Betragsquadrat  $|\Psi_1(t)|^2$  für  $\Omega = 4$  grafisch dar.
4. (2 Punkte) Berechnen Sie die erste Komponente  $\psi_1(t)$  für den Fall  $\Delta = 3$  und  $\Omega = 4$  und die Anfangsbedingung  $|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
5. (2 Bonus Punkte) Stellen Sie das Betragsquadrat  $|\Psi_1(t)|^2$  für  $\Omega = 4$  und  $\Delta = 3$  grafisch dar. Welche Unterschiede gibt es zwischen den Fällen mit und ohne Verstimmung?

**Vorlesung:** • Donnerstags 08–10 Uhr im EW 201

**Übungen:**

Mo	10–12 Uhr	EW 731, EW 229
Mo	14–16 Uhr	EW 114, EW 229
Di	12–14 Uhr	EW 229, EW 733
Di	16–18 Uhr	EW 114, EW 229
Do	16–18 Uhr	EW 731
Fr	10–12 Uhr	EW 731

**Scheinkriterien:** • Mindestens 50% der Übungspunkte

- Bestandene Klausur
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien

**Sprechzeiten:**

Prof. Dr. Tobias Brandes	EW 744	Mo	13-14 Uhr	brandes@physik.tu-berlin.de
Dr. Javier Cerrillo	EW 705	Mi	11-12 Uhr	cerrillo@tu-berlin.de
Dr. Torben Winzer	EW 703	Mi	16-17 Uhr	t.winzer@mailbox.tu-berlin.de
Sina Böhling	EW 060	Mi	09-10 Uhr	sina.boehling@campus.tu-berlin.de
Samuel Brem	EW 060	Do	15-16 Uhr	samuel.brem@physik.tu-berlin.de
Henrik Kowalski	EW 060	Mo	16-17 Uhr	henrik@physik.tu-berlin.de
Jonas Rezacek	EW 060	Di	14-15 Uhr	rezacek@campus.tu-berlin.de

**Hinweise:**

Die Übungsblätter werden bis Freitag 12 Uhr im Briefkasten des ER-Gebäudes abgegeben.

Weitere Informationen können auf der Vorlesungshomepage des Instituts für Theoretische Physik gefunden werden.