Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Torben Winzer, Samuel Brem BSc, Henrik Kowalski BSc, Sina Böhling, Jonas Rezacek

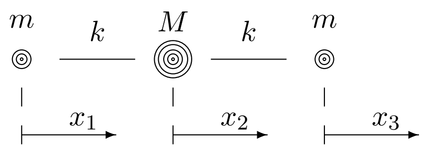
4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS 2015

Abgabe: Fr. 22.05.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 9 (8 Punkte): *Schwingungsfrequenzen eines Moleküls*

Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte, die durch masselose Federn miteinander verbunden sind. Betrachten Sie hier den Fall, dass die äußeren beiden Massen m gleich sind und sich von der inneren Masse M unterscheiden. Die Federkonstanten k seien gleich.



(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_i = a_i \exp(i\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_2, \tag{1}$$
$$M\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \tag{2}$$
$$m\ddot{x}_3 = kx_2 - kx_3 \tag{3}$$

ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte, d.h. Eigenschwingungen, und Eigenvektoren. Diskutieren Sie für die 3 Eigenschwingungen eine physikalische Interpretation.

(b) (1 Punkt) Wie lautet die allgemeine Lösung?

(c) (3 Punkte) Wie lautet die spezielle Lösung für $x_1(0) = 3\,\text{cm}$, $x_2(0) = -2\,\text{cm}$ und $x_3(0) = -1\,\text{cm}$ und mit $M = 4 \cdot m = 0.4\,\text{kg}$ und $k = 1\,\text{kg/s}^2$? Plotten Sie die Auslenkung der drei Atome als Funktion der Zeit für die ersten zehn Sekunden.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 10 (12 Punkte): *Elektrischer Schwingkreis*

Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus eine Induktivität L und einer Kapazität C die in Reihe geschaltet sind. Ein realer Schwingkreikreis hat zudem immer einen elektrischen Widerstand R, den wir hier als konzentriertes Bauteil annehmen. Legt man zusätzlich eine äußere Spannung $U(t) = U_0 \sin(\bar{\omega}\, t)$ wird die zeitliche Entwicklung der Stromstärke I durch

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = U_0 \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t) \tag{4}$$

beschrieben. Es handelt sich also um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(a) (2 Punkte) Lösen Sie zunächst die zugehörige homogene Gleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung für $R < 2\sqrt{L/C}$ aus?

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für $I(t = 0) = I_0$ und $\dot{I}(t = 0) = 0$. Plotten Sie die Stromstärke als Funktion der Zeit und nehmen Sie dazu an, dass alle Größen dimensionslos sind mit $I_0 = L = C = 10 \cdot R = 1$.

(c) (3 Punkte) Betrachten Sie nun auch die äußere Spannung und finden Sie eine spezielle Lösung für die inhomogene Differentialgleichung. *Hinweis:* Überlegen Sie sich hierzu einen geeigneten Lösungsansatz indem Sie annehmen, dass das System auf lange Zeit mit der Frequenz $\bar{\omega}$ schwingen wird.

(d) (1 Punkt) Geben Sie die Gesamtlösung zu Gleichung (4) an.

(e) (4 Punkte) Bestimmen und plotten sie die Gesamtlösung als Funktion der Zeit für die im Aufgabenteil (b) gegebenen Parameter und mit $U_0 = 0.2$ sowie $\bar{\omega} = 0.5$. Beachten Sie dabei, dass sich die Koeffizienten der in Aufgabenteil (b) ermittelten Lösung durch die Inhomogenität ändern.