Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Javier Cerrillo, Dr. Torben Winzer, Samuel Brem BSc, Henrik Kowalski BSc, Sina Böhling, Jonas Rezacek

6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS 2015

Abgabe: Fr. 05.06.2015 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (5 Punkte): *Eigenschaften der Delta-Funktion*

Die Diracsche Deltafunktion kann dargestellt werden als

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad , \sigma > 0\,.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) = 1$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x) \quad , c \neq 0$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\delta(x) = 0$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x) f(x) = -f'(0)$

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 16 (6 Punkte): *Fouriertransformation*

(a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) \exp(i\omega t)$:

(1)	$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha\mathcal{F}[f](\omega) + \beta\mathcal{F}[g](\omega)$	(Linearität)
(2)	$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$	(Ableitung)
(3)	$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = \exp(i\omega t_0)\mathcal{F}[f](\omega)$	(Verschiebungssatz)

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte

(1) von der Kastenfunktion $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$

(2) und von $f(t) = \exp(-|t|)$.

Aufgabe 17 (2 Punkte): *Faltungssatz*

Beweisen Sie den Faltungssatz (vgl. Vorlesung)

$$\mathcal{F}[(f*g)(t)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)\mathcal{F}[g(t)](\omega).$$

Dabei ist

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')g(t-t')$$

das Faltungsintegral.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 18 (7 Punkte): *Inverse Fourier-Transformation*

(a) Verwenden Sie dass Gauß-Integral (vgl. Aufg. 15), um zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-ax^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) .$$

Hinweis: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung.

(b) Nutzen Sie das Ergebnis aus (a), um die Fourier-Transformierte der Gauß-Verteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad , \sigma > 0$$

zu berechnen. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

(c) Nutzen Sie die Rücktransformation aus der Vorlesung um die Fourier-Darstellung der Deltafunktion

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ikx}$$

zu beweisen.

(d) Zeigen Sie damit, dass eine Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) \mathrm{e}^{-ikx} \qquad \text{durch} \qquad f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{ikx}$$

invertiert wird.