

English summary

1.2 Introduction to networks (continued)

• Scale-free networks

- rich get richer, Pareto principle, 80/20 rule, existence of hubs

- degree distribution: $p(k) = C k^{-\gamma}$ with $C = (\gamma-1) k_{min}^{\gamma-1}$

- m -th moment of $p(k)$: $\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{\infty} k^m p(k) dk = \frac{\gamma-1}{m-\gamma+1} k_{min}^{\gamma-1} \left[k^{m-\gamma+1} \right]_{k_{min}}^{\infty}$

divergence for $m-\gamma+1 > 0$

many real-world networks have $\gamma < 3 \Rightarrow \langle k^2 \rangle$ diverges

\Rightarrow variance / standard deviation $\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$

\Rightarrow no characteristic scale: random node; $k = \langle k \rangle \pm \infty$

• $p(k)$ of Barabasi-Albert network: $p(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \xrightarrow{k \gg 1} k^{-3}$

1.3 Robustness of networks

• removal of nodes (and their links)

• random network vs. scale-free networks

• random removal vs. targeted removal (according to node degree)

- measures: - size of largest cluster
- average path length

⇒ Critical fraction of removed nodes

⇒ Scale-free networks: (i) robust against random removal
 (ii) sensitive " targeted "

1.4 "Small-world" Networks

letters to nature

typically slower than $\sim 1 \text{ km s}^{-1}$) might differ significantly from what is assumed by current modelling efforts²⁷. The expected equation-of-state differences among small bodies (ice versus rock, for instance) presents another dimension of study; having recently adapted our code for massively parallel architectures (K. M. Olson and E.A, manuscript in preparation), we are now ready to perform a more comprehensive analysis.

The exploratory simulations presented here suggest that when a young, non-porous asteroid (if such exist) suffers extensive impact damage, the resulting fracture pattern largely defines the asteroid's

responsibilities. The stochastic interiors and their shapes using and rheology dependent on low plan

Collective dynamics of 'small-world' networks

Duncan J. Watts* & Steven H. Strogatz

Department of Theoretical and Applied Mechanics, Kimball Hall,
 Cornell University, Ithaca, New York 14853, USA

Networks of coupled dynamical systems have been used to model biological oscillators¹⁻⁴, Josephson junction arrays^{5,6}, excitable media⁷, neural networks⁸⁻¹⁰, spatial games¹¹, genetic control networks¹² and many other self-organizing systems. Ordinarily, the connection topology is assumed to be either completely regular or completely random. But many biological, technological

Nature 393, 440
 (1998)

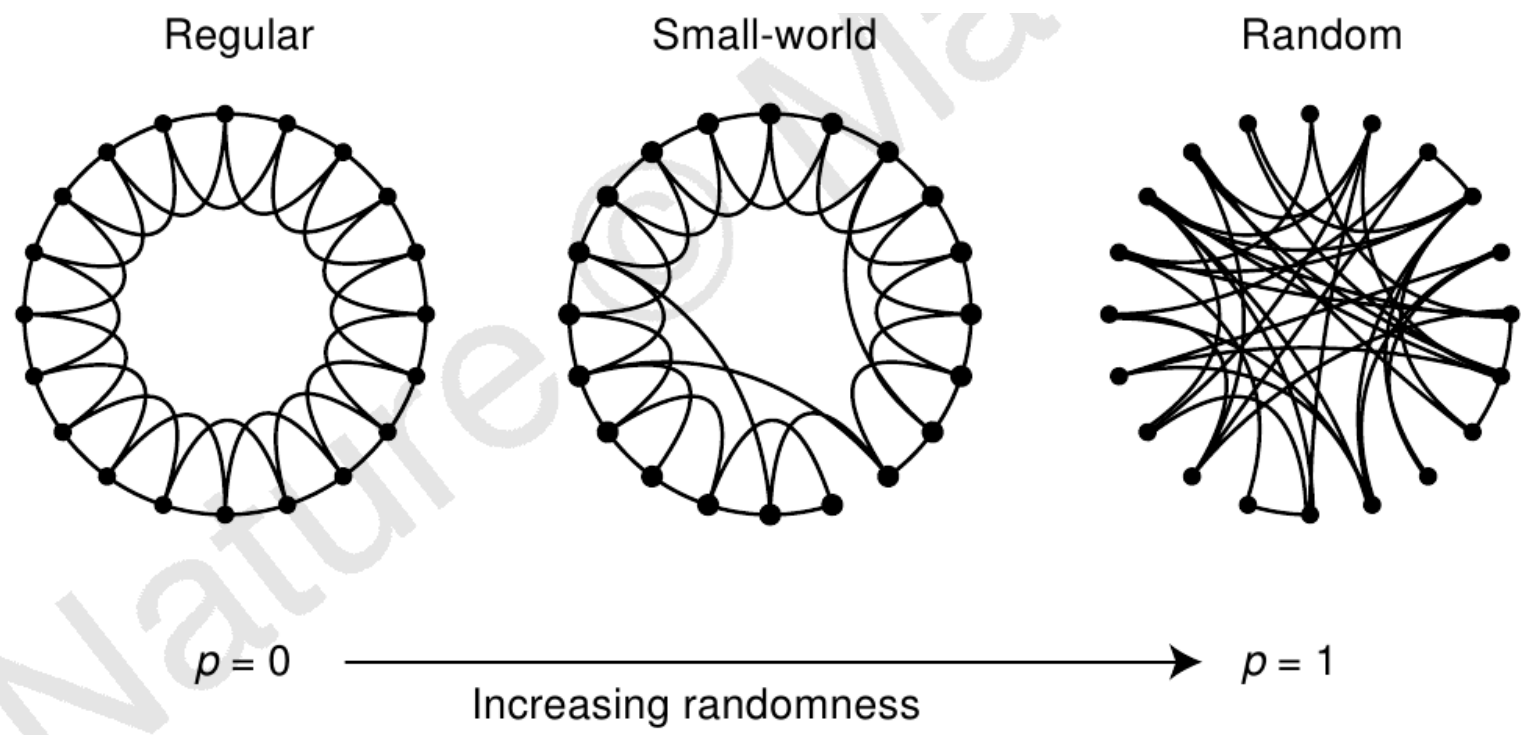


...regular or completely random. But many biological, technological and social networks lie somewhere between these two extremes. Here we explore simple models of networks that can be tuned through this middle ground: regular networks 'rewired' to introduce increasing amounts of disorder. We find that these systems can be highly clustered, like regular lattices, yet have small characteristic path lengths, like random graphs. We call them 'small-world' networks, by analogy with the small-world phenomenon^{13,14} (popularly known as six degrees of separation¹⁵). The neural network of the worm *Caenorhabditis elegans*, the power grid of the western United States, and the collaboration graph of film actors are shown to be small-world networks. Models of dynamical systems with small-world coupling display enhanced signal-propagation speed, computational power, and synchronizability. In particular, infectious diseases spread more

...regular or completely random. But many biological, technological and social networks lie somewhere between these two extremes. Here we explore simple models of networks that can be tuned through this middle ground: regular networks 'rewired' to introduce increasing amounts of disorder. We find that these systems can be highly clustered, like regular lattices, yet have small characteristic path lengths, like random graphs. We call them 'small-world' networks, by analogy with the small-world phenomenon^{13,14} (popularly known as six degrees of separation¹⁵). The neural network of the worm *Caenorhabditis elegans*, the power grid of the western United States, and the collaboration graph of film actors are shown to be small-world networks. Models of dynamical systems with small-world coupling display enhanced signal-propagation speed, computational power, and synchronizability. In particular, infectious diseases spread more

Received 4 February; accepted 18 March 1998.

1. Asphaug, E. & Melosh, H. J. The Stickney impact of Phobos: A dynamical model. *Icarus* **101**, 144–164 (1993).
2. Asphaug, E. *et al.* Mechanical and geological effects of impact cratering on Ida. *Icarus* **120**, 158–184 (1996).
3. Nolan, M. C., Asphaug, E., Melosh, H. J. & Greenberg, R. Impact craters on asteroids: Does strength or gravity control their size? *Icarus* **124**, 359–371 (1996).
4. Love, S. J. & Ahrens, T. J. Catastrophic impacts on gravity dominated asteroids. *Icarus* **124**, 141–155 (1996).
5. Melosh, H. J. & Ryan, P. V. Asteroids: Shattered but not dissolved. *Science* **230**, 523–524 (1997).



Nachbarn / Grad

$p = 0: K = 4, N = 20$

p : Wahrscheinlichkeit für Neuverknüpfung

1) Start mit regulärem Ring

2) zufällige Neuverknüpfung jedes Links mit Wahrscheinlichkeit p
(keine Selbstlinks oder Doppelte)

$\Rightarrow p \frac{NK}{2}$ neue Links,
Links

Links fest

$\Rightarrow \langle K \rangle = const.$

Zeit: flüssige Übergang / Interpolation zwischen regulären Netzwerken ($p=0$)
und Zufallsnetzwerken ($p=1$).

Interpretation: Freundschaften lokal (Nachbarn, Kollegen ...) und
nichtlokal (Freunde, andere Länder / verschiedene Gruppen...)

- ▶ Charakteristische Pfadlänge L :
 - ▶ Mittelwert der kürzesten Verbindung zwischen zwei Knoten
- ▶ Clusterkoeffizient C :
 - ▶ i : Knoten mit k_i Links zu anderen Knoten
 - ▶ Wenn alle diese k_i nächsten Nachbarn miteinander verbunden wären, gäbe es $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ Links zwischen ihnen.
 - ▶ E_i : Anzahl der tatsächlichen Links zwischen den Nachbarn
 - ▶ C_i : Clusterkoeffizient des i -ten Knoten = Verhältnis zwischen tatsächlichen und möglichen Links zwischen den nächsten Nachbarn:

$$C_i = \frac{E_i}{\frac{k_i(k_i-1)}{2}}$$

- ▶ C : Clusterkoeffizient des Netzwerks = Durchschnitt aller C_i .

Pfadlänge L und Clusterkoeffizient C

► Vorgabe: $N \gg K \gg \ln(N) \gg 1$

► Bereich $p \rightarrow 0$: regulär

► $L \sim N/(2K) \gg 1$

► $C = 3(K-2)/[4(K-1)] \rightarrow 3/4$

► Bereich $p \rightarrow 1$: zufällig

► $L \sim \ln(N)/\ln(K)$

► $C \sim K/N \ll 1$

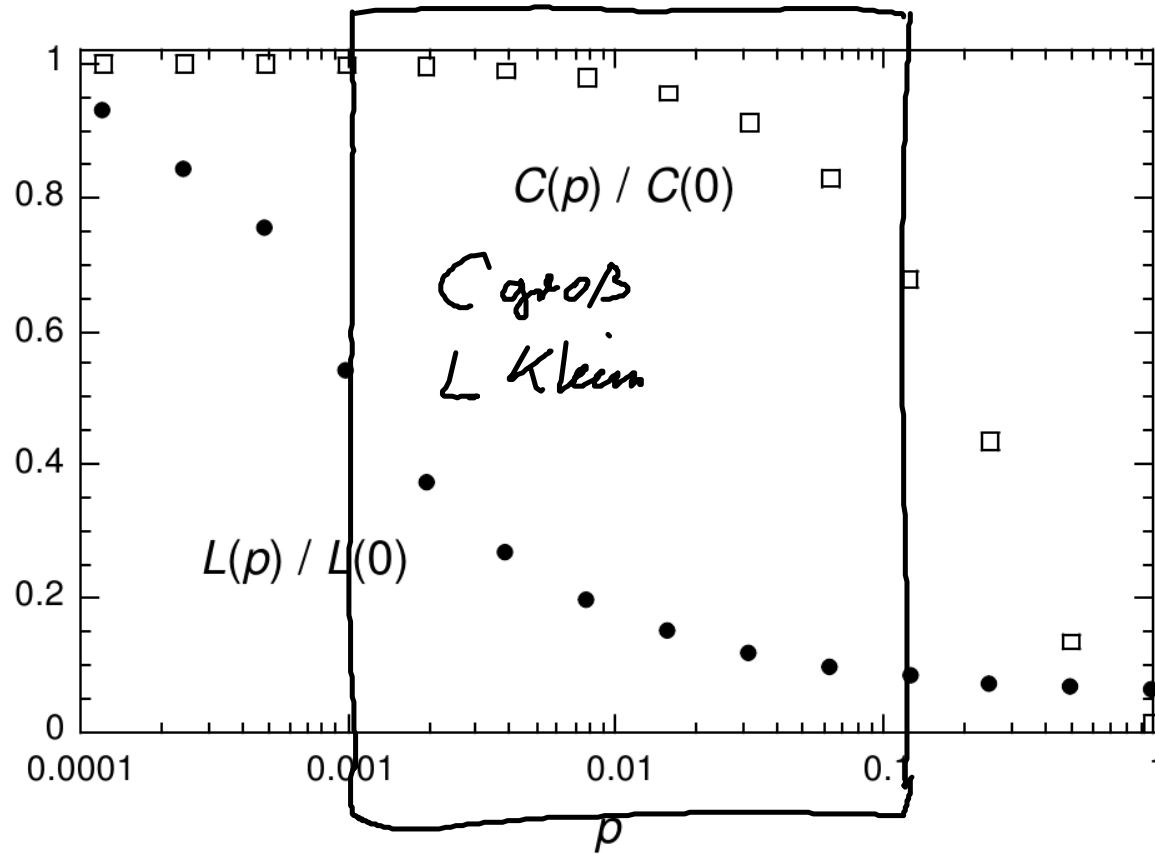
} ohne Herleitung
(ist aber nicht schwierig 😊)

► Äquivalente Definition von C :

$$C_i = \frac{\text{Anzahl der Dreiecke mit } i}{\text{Anzahl der Tripel mit } i \text{ als Zentrum}}$$

Ergebnis:

Pfadlänge L und Clusterkoeffizient C



"Small-world":

noch lokale Struktur
vorhanden, aber kurze
Wege zu allen Knoten

$L(0), C(0)$: reguläres Netzwerk ($N = 1000, K = 10$)

Beispiele für *small-world*-Netzwerke

- ▶ Soziale Netzwerke:
 - ▶ Gemeinsamer Auftritt von Schauspielern in einem Film ($N = 225226$, $K = 61$)
- ▶ Technologische Netzwerke:
 - ▶ Elektrische (Überland-)Leitungen ($N = 4941$, $K = 2.67$)
- ▶ Biologische Netzwerke:
 - ▶ Neuronales Netzwerk (*C. elegans*) ($N = 282$, $K = 14$)

und noch
viele mehr...

Bsp.:

6-degrees of
separation

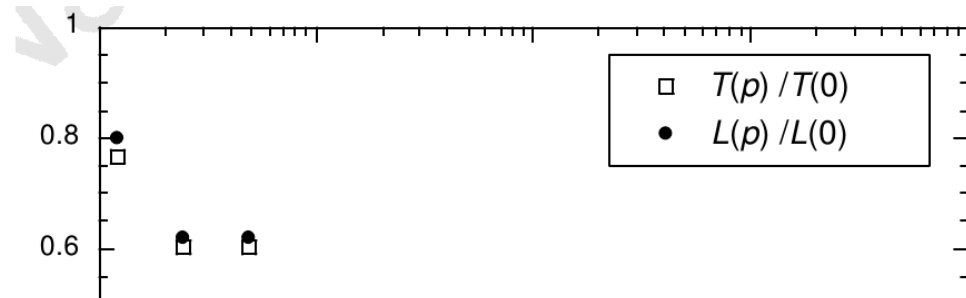
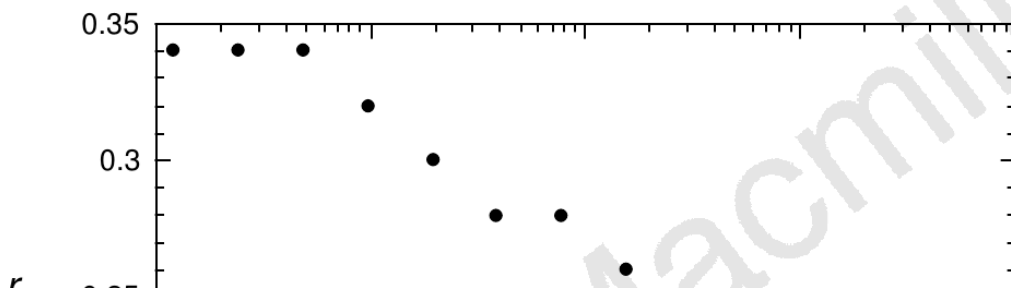
Milgram's

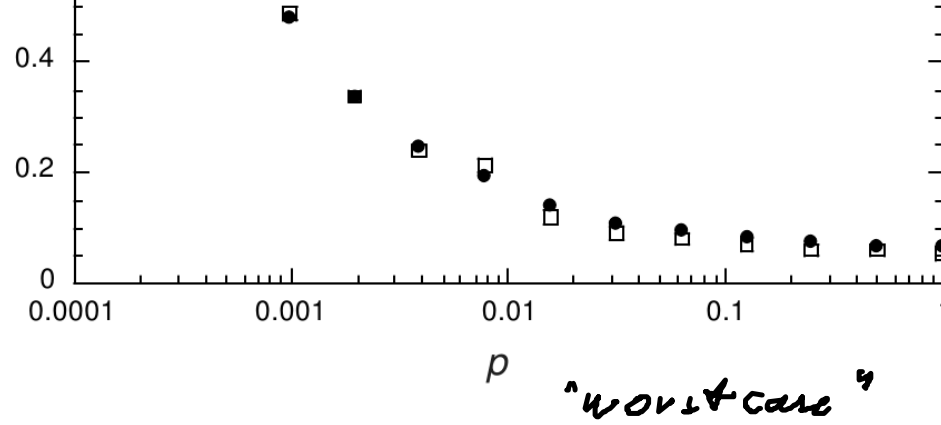
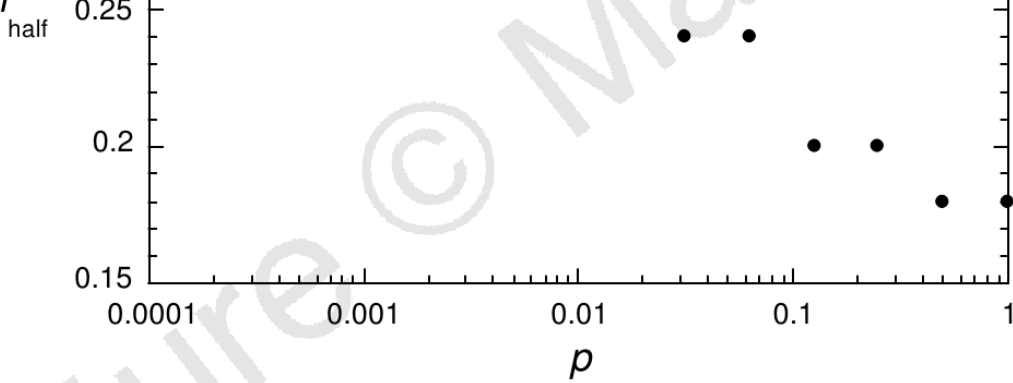
Small-world experiment!

Psych. today 2, 60
(1967)

Anwendung: Robustheit gegenüber Kvantitätsausbreitung

- ▶ Gegebenes Netzwerk (festes p)
- ▶ Zum Zeitpunkt $t = 0$:
 - ▶ 1 Knoten i infiziert
- ▶ Zum Zeitpunkt $t = 1$:
 - ▶ Nachbarn von i mit Wahrscheinlichkeit r angesteckt
 - ▶ i aus Netzwerk entfernt (Immunität, Tod)
- ▶ Zum Zeitpunkt $t = 2 \dots$
- ▶ Ausbreitung gemäß Netzwerktopologie
- ▶ Analyse der Ausbreitung der Krankheit:
 - ▶ r_{half} : Ansteckungswahrscheinlichkeit für Infektion von 50% aller Knoten im Laufe der Zeit
 - ▶ T : Zeit bis zur globalen Infektion für $r = 1$





r_{half} : kritische Infektionswahrscheinlichkeit (50% infiziert)

T: Zeit für globale Infektion für $r = 1$

- Zufallsnetzwerke begünstigen Ausbreitung (kleinere r_{half})

- Kürzester Pfad $\hat{=}$ schnellster Ausbreitungsweg

2 Metapopulationsbasierte Modelle der Krankheitsausbreitung

2.1 SIR-Modell (siehe auch VL 2 & VL 3: lineare Stabilitätsanalyse)

$$\dot{S} = -\beta SI, \quad \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \quad \dot{R} = \gamma I, \quad R + S + I = 1$$

Anteil von "Recovered, Susceptibles, Infected" an Gesamtpopulation

Herleitung unter der Annahme homogener Durchmischung: (jeder Kontakt hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

(i) Suszeptibler hat durchschnittlich K Kontakte pro Zeiteinheit

(ii) Davon ist ein Anteil $I = \frac{Y}{N}$ infektiös ($Y = \#$ Infizierte)

\Rightarrow im Intervall $[t, t + \delta t]$ Kontakt zu $k \frac{Y}{N} \delta t$ Infizierten

(iii) Definiere c als Wahrscheinlichkeit einer Übertragung / Ausbreitung eines Kontakts:

$\Rightarrow (1-c)$ " " " " " " " " " " " "

\Rightarrow Wahrscheinlichkeit Keiner Übertragung bei $k \frac{Y}{N} \delta t$ Kontakten:

$$(1 - \delta q) = (1-c)^{kY\delta t/N} \Rightarrow \delta q = 1 - \exp[-\beta Y \delta t / N]$$

$$\beta = -k \log(1-c)$$

"übertragungswerte
pro Suszeptiblen
(„Infektionskraft“)

$$\Rightarrow \delta q = 1 - \left(1 - \beta Y \delta t / N + \dots\right) \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \beta \frac{Y}{N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\delta t \rightarrow 0$

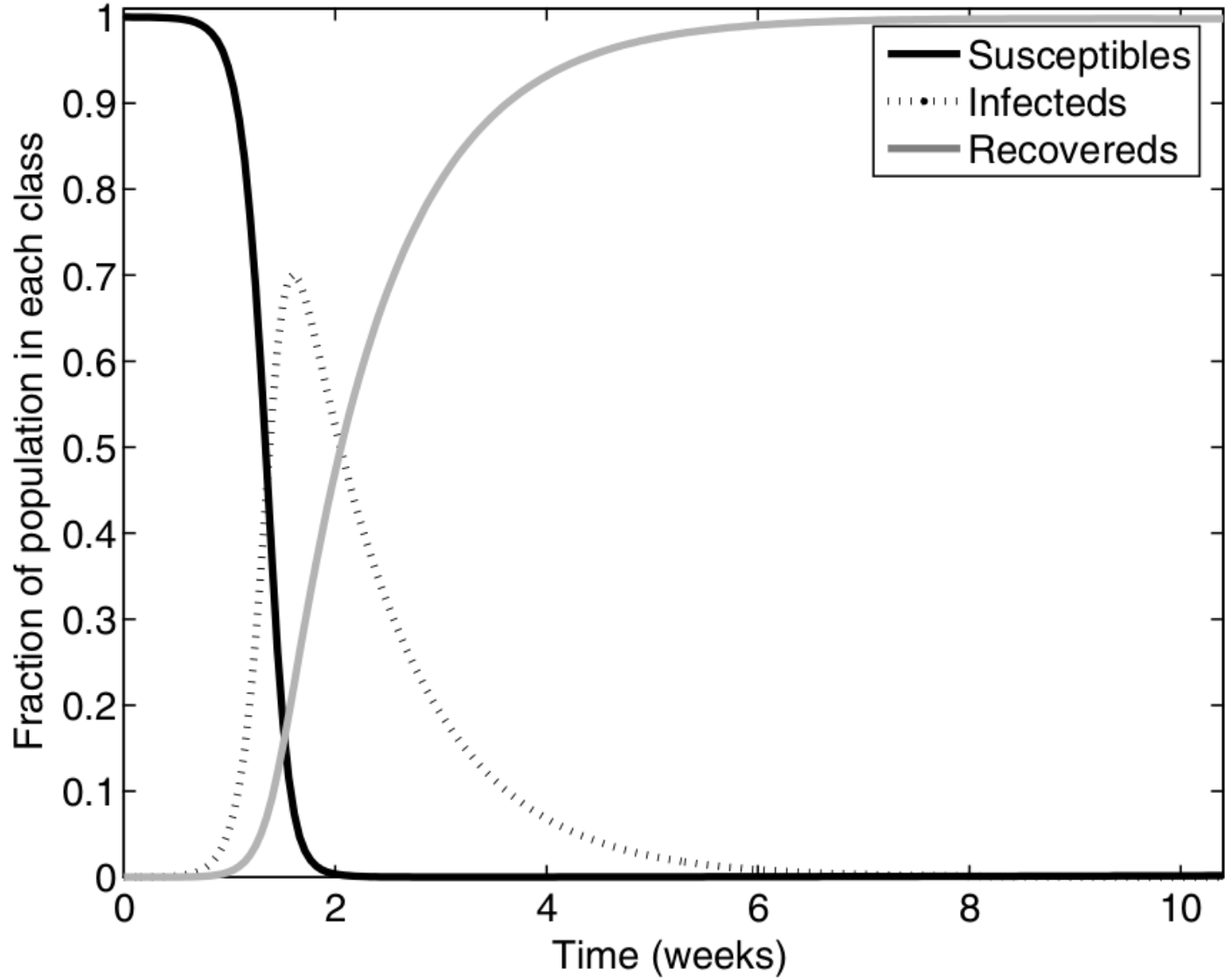
(iv) Bezogen auf X Suszeptible in der Population:

$$\frac{dX}{dt} = -\beta X \frac{Y}{N} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = -\beta S I$$

$S = \frac{X}{N}, I = \frac{Y}{N}$

„Frequenzabhängiges SIR-Modell“
(unabhängig von Populationsgröße,
sondern vom Anteil an Populationen)

Vgl. $\frac{dX}{dt} = -\beta XY$ „Dichtabhängiges SIR-Modell“



$$\left. \begin{array}{l} \beta = 520\alpha \\ \gamma = 7d \end{array} \right\} \Rightarrow R_0 \approx 10$$

asymptotisches Verhalten:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dS}{dR} = -\frac{\beta S}{\gamma} = -R_0 S$$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } S(t) = S(0) e^{-R_0 R(t)} \quad \text{für } R(0) = 0$$

$$\Rightarrow S(t) > 0, \text{ weil } e^{-R(t)R_0} > 0 \quad (\text{Rest von Suszeptiblen})$$

$$S(\infty) \stackrel{\uparrow}{=} 1 - R(\infty) = S(0) e^{-R(\infty)R_0} \Rightarrow 1 - R(\infty) - e^{-R(\infty)R_0} = 0$$

\uparrow \uparrow
 $I(\infty) = 0$ $S(0) = 1$

(transzendentale Gleichung)

Lösen von $\frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma(1 - R - S)$

$$= \gamma(1 - S(0)e^{-R_0 R} - R)$$

$$\approx \gamma \left(1 - S(0) + (S(0)R_0 - 1)R - \frac{S(0)R_0^2}{2} R^2 \right)$$

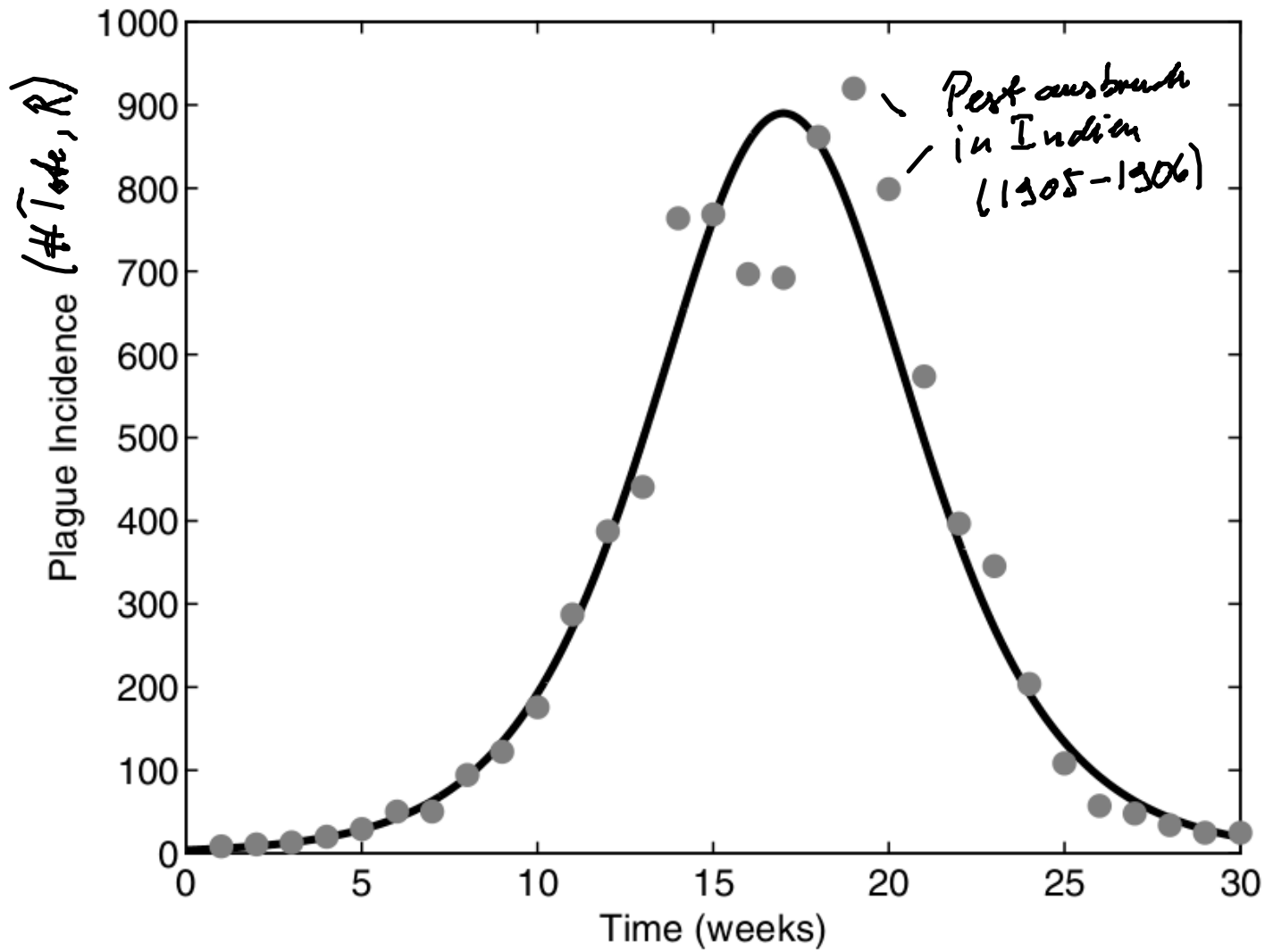
\uparrow
 $R_0 R \ll 1, e^{-R_0 R} = 1 - R_0 R + \frac{R_0^2}{2} R^2 - \dots$

$$\Rightarrow \dot{R} = \gamma \left[1 - S(0) + (S(0)R_0 - 1)R - \frac{S(0)R_0^2}{2} R^2 \right]$$

im Prinzip lösbar: $R(t) = \frac{1}{R_0^2 S(0)} \left[S(0)R_0 - 1 + \alpha \tanh\left(\frac{1}{2}\alpha R t - \phi\right) \right]$

mit Konstanten α, ϕ

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{\gamma \alpha^2}{2S(t)R_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi\right)$$



$$\dot{R} = 890 \operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4)$$