7. Der Messprozess in der QM. Die Heisenberg´sche Unschärferelation

Am Messprozess sind beteiligt: Das Messobjekt ($\rightarrow$ MO)
Die Messapparatur ($\rightarrow$ MA)
Der Beobachter (B)

Die Messung ist, grob gesagt, eine wechselseitige Beeinflussung ($\rightarrow$ Wechselwirkung) zwischen MO, MA und B.

Klassische Physik: Diese Wechselwirkung kann vernachlässigbar klein gemacht werden.

Quantenmechanik: Die Wechselwirkung zwischen MO und MA ist nicht vernachlässigbar. Das Einschalten der MA führt in der Regel zur unkontrollierten Störung des MO. Die Messung ändert den Zustand des MO (Zustandsreduktion, vgl. 3. Postulat), d.h. bei unmittelbar anschließender zweiter Messung befindet sich das MO in der Regel in einem anderen Zustand als vor der Messung.

- **Kombinierte Messung zweier Observablen A und B**

Sei $\hat{A}|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$ und $\hat{B}|\phi_n\rangle = b_n|\phi_n\rangle$. Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

1. Fall:
Die den Observablen A und B zugeordneten Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind vertauschbar: $[\hat{A},\hat{B}] = 0$. Dann besitzen sie einen gemeinsamen VONS, $\{|\psi_n\rangle\}$.

Eine A-Messung im Zustand $|\psi\rangle$ ergibt den Messwert a_n mit Prob ($a = a_n$) $= |\langle\psi_n|\psi\rangle|^2$ und reduziert den Zustand vor der Messung, $|\psi\rangle$, auf den zu a_n korrespondierenden Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ des Operators $\hat{A}$.

Eine sofort anschließende B-Messung ergibt mit Sicherheit den Wert b_n, denn
Prob ($b = b_n \mid a = a_n$) $= |\langle\psi_n|\psi_n\rangle|^2 = 1$.

2. Fall:

$[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$, d.h. $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besitzen unterschiedliche VONS, $\{|\psi_n\rangle\}$ bzw. $\{|\phi_n\rangle\}$.

Nach der A-Messung befindet sich das MO/qmS nicht in einem Eigenzustand von $\hat{B}$.

Deshalb ist Prob ($b = b_n \mid a = a_n$) $= \left|\langle\phi_n|\psi_n\rangle\right|^2 \neq 1$.

Fazit: Werden in der QM zwei verschiedene Observable zeitnah in unterschiedlicher Reihenfolge gemessen, kann das Ergebnis unterschiedlich sein. Manche Observable sind in der QM nicht gleichzeitig scharf messbar.

Das Ergebnis des Gedankenexperiments, nachdem A und B nicht gleichzeitig scharf messbar sein sollten, wenn die zugeordneten Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ nicht kommutieren, quantifizieren wir nun durch die Angabe einer objektiven unteren Schranke für die Streuung der Messwerte von A und B:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\rangle\right| \qquad \rightarrow \qquad \text{verallgemeinerte } \textbf{Heisenberg´sche Unschärferelation}.$$

Hierbei verstehen wir unter der Streuung die mittleren quadratischen Schwankungen der Messwerte um den quantenmechanischen Erwartungswert im Zustand $|\psi\rangle$, also z.B. für die Observable A den Ausdruck

$$\Delta A := \sqrt{\left\langle (\Delta\hat{A})^2\right\rangle} = \sqrt{\left\langle (\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)^2\right\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\left(\hat{A}-\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^2|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \left(\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\right)^2}\,.$$

Der Beweis fußt darauf, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren sind. Mit $\hat{A}$ und $\hat{B}$ sind auch $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ und $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$ hermitesch. Wir führen nun den nicht hermiteschen (!) Operator $\hat{Q} := \Delta\hat{A} - i\lambda\,\Delta\hat{B}$, λ reell ein, und betrachten den Erwartungswert $\langle\hat{Q}^+\hat{Q}\rangle$

$$f(\lambda) = \langle\psi|\hat{Q}^+\hat{Q}|\psi\rangle = \langle\hat{Q}\psi|\hat{Q}\psi\rangle =: f(\lambda) \geq 0\,.$$

Für die positiv definite Funktion $f(\lambda)$ des reellen Parameters λ erhalten wir

$$f(\lambda) = \left\langle \left(\Delta\hat{A} + i\lambda\,\Delta\hat{B}\right)\left(\Delta\hat{A} - i\lambda\,\Delta\hat{B}\right)\right\rangle = \underbrace{\left\langle \left(\Delta\hat{A}\right)^2 \right\rangle}_{\alpha} + i\lambda \underbrace{\left\langle \Delta\hat{B}\Delta\hat{A} - \Delta\hat{A}\,\Delta\hat{B}\right\rangle}_{\beta} + \lambda^2 \underbrace{\left\langle \left(\Delta\hat{B}\right)^2 \right\rangle}_{\gamma} =$$

$$= \alpha - i\beta\lambda + \gamma\lambda^2.$$

Die Größen α und γ sind positiv, denn für jeden hermiteschen Operator $\hat{F}$ gilt

$$\left\langle \hat{F}^2 \right\rangle = \langle\psi|\hat{F}\hat{F}|\psi\rangle = \left\langle \hat{F}^+\psi \middle| \hat{F}\psi \right\rangle = \left\langle \hat{F}\psi \middle| \hat{F}\psi \right\rangle \geq 0\,.$$

Die Größe β ist rein imaginär, denn β^2 ist negativ, weil

$$\beta^2 = \left\langle [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] \right\rangle^2 = \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle^2 = -\left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \left\langle [\hat{B}, \hat{A}] \right\rangle \stackrel{\bullet}{=} -\left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle^* = -\left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right|^2 \leq 0\,.$$

Dabei haben wir bei $\stackrel{\bullet}{=}$ verwendet, dass für hermitesche Operatoren $\left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle^* = \left\langle [\hat{B}, \hat{A}] \right\rangle$ gilt, denn

$$\left\langle [\hat{B}, \hat{A}] \right\rangle = \left\langle \hat{B}\hat{A} \right\rangle - \left\langle \hat{A}\hat{B} \right\rangle = \langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \left\langle \hat{A}\,\hat{B}\psi \middle| \psi \right\rangle - \left\langle \hat{B}\,\hat{A}\,\psi \middle| \psi \right\rangle =$$
$$= \left\langle \psi \middle| \hat{A}\,\hat{B}\psi \right\rangle^* - \left\langle \psi \middle| \hat{B}\,\hat{A}\,\psi \right\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}|\psi\rangle = \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle^*.$$

Zusammenfassend besitzt die positiv definite quadratische Funktion $f(\lambda) = \alpha - i\beta\lambda + \gamma\lambda^2$ ein lokales Minimum bei $\lambda = \dfrac{i\beta}{2\gamma}$ $\left(f'(\lambda) = 2\gamma\lambda - i\beta = 0,\ f''\big|_{\frac{i\beta}{2\gamma}} = 2\gamma > 0 \right)$, wobei der entsprechende Funktionswert wegen $f\left(\dfrac{i\beta}{2\gamma}\right) = \alpha - i\beta\dfrac{i\beta}{2\gamma} + \gamma\left(\dfrac{i\beta}{2\gamma}\right)^2 = \alpha + \dfrac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0$ positiv ist. Daraus folgt nach Multiplikation mit $\gamma > 0$ schließlich $\alpha\gamma \geq -\dfrac{\beta^2}{4}$, also $\left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle \cdot \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle \geq \dfrac{1}{4} \left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right|^2$, d.h. wie behauptet $\underline{\Delta A \cdot \Delta B \geq \dfrac{1}{2} \left| \left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle \right|}$ für $\underline{\hat{A} = \hat{A}^+,\ \hat{B} = \hat{B}^+}$.

<u>Merke</u>: Sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch, dann ist $[\hat{A}, \hat{B}]^+ = [\hat{B}, \hat{A}] = -\,[\hat{A}, \hat{B}]$. Nicht $[\hat{A}, \hat{B}]$ sondern $i[\hat{A}, \hat{B}]$ ist hermitesch; der qm Erwartungswert $\left\langle [\hat{A}, \hat{B}] \right\rangle$ ist also i.a. nicht reell.

■ Als Beispiel für Anwendungen bzw. Konsequenzen der Unschärferelation betrachten wir die Energie des Grundzustandes beim 1D harmonischen Oszillator [Schwabl, 48]

klassisch: $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$, "Grundzustand" $E = 0$ ist möglich.

quantenmechanisch: $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 0,1,2,\dots$, also $E_n = \frac{\hbar\omega}{2} \neq 0$.

Frage: Wieso?

Antwort: E = 0 impliziert x = 0 und p = 0, die beide aber wegen der UR nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können.

Im Detail: Die zu E_0 korrespondierende Wellenfunktion des Grundzustands

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

ist gerade, d.h., wir haben wir $\langle\hat{p}\rangle = \langle\hat{x}\rangle = 0$. Aus der UR $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ ergibt sich deshalb in diesem Fall $\langle\hat{p}^2\rangle\langle\hat{x}^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$, also die untere Schranke

$$E = \frac{\langle\hat{p}^2\rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{p}^2\rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{1}{\langle\hat{p}^2\rangle}\frac{\hbar^2}{4} \quad (*)$$

für die Energie. Ableitung nach $\langle\hat{p}^2\rangle$ liefert als Bedingung für das Energieminimum

$$\frac{1}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{8}\frac{1}{\langle\hat{p}^2\rangle^2} = 0 \quad \text{also} \quad \langle\hat{p}^2\rangle_{\min} = \frac{m\omega\hbar}{2}.$$

Eingesetzt in $(*)$ folgt für die minimale Energie

$$E_{\min} = \frac{m\omega\hbar}{2}\frac{1}{2m} + \frac{m\omega^2\hbar^2}{8}\frac{2}{m\omega\hbar} = \frac{\omega\hbar}{2}.$$

Fazit: Die Grundzustandsenergie beim 1D HO ist der kleinste Wert der Energie, der mit der UR vereinbar ist.

- **Energie-Zeit-Unschärfe**

Die Zeit ist in der Quantenmechanikein Parameter, der nicht als EW eines Operators $\hat{t}$ aufgefasst werden kann. Es gibt verschieden Möglichkeiten der Herleitung der Energie-Zeit-Unschärfe $\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

A: Formale Vorgehensweise: Angenommen, $\hat{A}$ und $\hat{H}$ sind nicht explizit zeitabhängig. Dann ist

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle = \left\langle [\hat{A},\hat{H}] \right\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \hat{A} \right\rangle = \left\langle [\hat{A},\hat{H}] \right\rangle$$

Aus der verallgemeinerten UR folgt

$$\Delta A \cdot \Delta H \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [\hat{A},\hat{H}] \right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle\right| \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta H \cdot \frac{\Delta A}{\left|\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle\right|} \geq \frac{\hbar}{2}\ .$$

Wir führen das Zeitintervall Δt_A ein, indem sich der quantenmechanische Erwartungswert $\left\langle \hat{A} \right\rangle$ gerade um die mittlere quadratische Schwankung ΔA verschiebt, d.h.

$$\Delta t_A := \frac{\Delta A}{\left|\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle\right|}.$$

Ein solches charakteristisches Zeitintervall, das für eine nennenswerte Veränderung der statistischen Verteilung der Messwerte von A mindestens erforderlich ist, kann für alle Observable definiert werden. Da $\hat{H}$ die Energie E repräsentiert, "folgt" $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$.

Befindet sich ein qmS im Eigenzustand Z des zeitunabhängigen $\hat{H}$, also in einem stationären Zustand, dann ist $\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A} \right\rangle = 0$ und Δt divergiert. Das steht nicht im Widerspruch zu $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, da in diesem Zustand E scharf, also $\Delta E = 0$ ist.

Wir werden auf die Relation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ im Zusammenhang mit der Lebensdauer angeregter Zustände und den Energiebreiten im Spektrum emittierter Photonen zurückkommen, vgl. Kap. zeitabhängige Störungstheorie.

B: Beschreibe qmT durch einen Wellenzug (Wellenpaket) der Länge Δx. Für die Strecke Δx benötigt das Teilchen die Zeit $\Delta t \sim \frac{\Delta x}{\langle p \rangle / m}$ ("Zeitintervall des Vorbeiflugs"). Wegen $E \sim \frac{p^2}{2m}$ ist die Energieunschärfe etwa $\Delta E \sim \frac{\langle p \rangle \Delta p}{m}$. Das ergibt dann

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \frac{\langle p \rangle \Delta p}{m} \cdot \frac{\Delta x}{\langle p \rangle / m} = \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Bei der Verschiebung eines Wellenpaketes wird aus $\Delta x \to \Delta t$, aus $\Delta p \to \Delta E$ und aus $\Delta x \cdot \Delta p \to \Delta t \cdot \Delta E$

C: Eine weitere formale Argumentation ist folgende: Betrachte FT $g(\omega)$ einer zeitabhhängigen Funktion f(t) gemäß $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, g(\omega) e^{-i\omega t}$, $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t}$. Man findet $\Delta t \cdot \Delta\omega \cong 1$, und mit $E = \hbar\omega$ dann $\Delta t \cdot \Delta E \cong \hbar$. Beispiel: Ist f(t) Gauss-verteilt, dann auch $g(\omega)$ (beweisen!) und für die Breiten beider Verteilungen gilt $\Delta t \cdot \Delta\omega = \text{const}$.

8. Quantentheorie des Drehimpulses

Motivation: Bahndrehimpuls $\rightarrow$ Zentralfeld $\rightarrow$ H-Atom $\rightarrow$ Atomspektren, Orbitale

KM: $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$.

Bei Bewegung im Zentralfeld spielt die Drehimpulserhaltung eine zentrale Rolle.

QM: Korrespondenzprinzip führt auf $\underline{L} \rightarrow \hat{\underline{L}} = \hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{p}}$ mit den kartesischen Komponenten

$$\hat{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_x \\ \hat{L}_y \\ \hat{L}_z \end{pmatrix}, \text{ z.B. } \hat{L}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x \text{ oder kompakt } \underline{\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\,\hat{p}_k} \quad \text{(Summenkonvention)} \tag{8.1a}$$

$$\text{und dem Betrag des Bahndrehimpulses } \underline{\hat{\underline{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2} \tag{8.1b}$$

Wir erwarten, dass die Drehimpulserhaltung auch in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle bei der Bewegung in allen zentralsymmetrischen Feldern U(r) spielt, etwa im Sinne von $\Psi(\underline{r}) = \psi(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi)$.

Aus den kanonische Vertauschungsrelationen $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$, $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

folgt (vgl. Übungsblatt, nutze $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$)

$$\underline{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k} \quad \text{und} \quad \underline{[\hat{\underline{L}}^2, \hat{L}_i] = 0} \quad . \tag{8.2}$$

Schlussfolgerung: Die Komponenten des Bahndrehimpulses $\underline{L}$ sind nicht gleichzeitig scharf messbar; aber jede Komponente L_i und $\underline{L}^2$ können gleichzeitig scharf gemessen werden. Welche Messwerte sind für $\underline{L}^2$ und (z.B.) L_z zu erwarten? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir die beiden Eigenwerte der zugeordneten Operatoren bestimmen. Die Eigenwertgleichungen schreiben wir in der Form

$$\hat{\underline{L}}^2 |lm\rangle = \hbar^2\, l(l+1)|lm\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{L}_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle \tag{8.3}$$

Die unbekannten Größen l und m sind reelle Zahlen, denn $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ und $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ sind hermitesch, da $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{p}_x, \hat{p}_y\ \hat{p}_z$ es sind und den kanonischen Vertauschungsrelationen (VR) genügen. Damit ist auch $\underline{\hat{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ hermitesch. Der Ansatz (8.2) ist keine Beschränkung der Allgemeinheit. Wir könnten auch mit $\underline{\hat{L}}^2 |lm\rangle = \lambda |\lambda m\rangle$ und $\hat{L}_z |\lambda m\rangle = m |\lambda m\rangle$ starten. Dann werden die Rechnungen unübersichtlicher. Die Faktoren $\hbar^2$ bzw. $\hbar$ trennen wir aus Dimensionsgründen ab, dann sind l und m dimensionslos. $\underline{\hat{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ haben gemeinsame Eigenfunktionen $|lm\rangle$, weil sie vertauschbar sind.

8.1 Der verallgemeinerte Drehimpuls und die Drehimpulsalgebra

Wir verallgemeinern (8.1) und (8.2), indem wir definieren:

Def.: Jeder Vektoroperator $\underline{\hat{J}}$ mit $\underline{\hat{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$, dessen Komponenten der VR

$$\underline{[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k} \qquad \rightarrow \qquad \text{Drehimpulsalgebra} \tag{8.4}$$

genügen, heißt Drehimpulsoperator.

- **Algebraische (darstellungsunabhängige) Lösung des Eigenwertproblems für Drehimpulsoperatoren**

Wir suchen reelle Zahlen j und m sowie EZ $|jm\rangle$ derart, dass

$$\underline{\hat{J}}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{J}_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle$$

erfüllt sind und die Komponenten $\hat{J}_i$ der Drehimpulsalgebra genügen.

Es gilt:

(i) Da $\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 = \underline{\hat{J}}^2 - \hat{J}_z^2$ ein positiver Operator ist, folgt nach Projektion auf seine EZ $|\mathrm{jm}\rangle$

$\hbar^2\,\mathrm{j(j+1)} - \hbar^2\,\mathrm{m}^2 \geq 0$ und es ergeben sich für j und m die Schranken

$$-\sqrt{\mathrm{j(j+1)}} \leq \mathrm{m} \leq \sqrt{\mathrm{j(j+1)}}\ . \tag{8.5}$$

(ii) Wir definieren die Operatoren

Def.: $$\hat{J}_+ := \hat{J}_x + i\hat{J}_y\,,\ \hat{J}_- := \hat{J}_x - i\hat{J}_y \qquad \to \text{Leiteroperatoren} \tag{8.6}$$

Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen (prüfen!)

$$\left[\hat{J}_+,\hat{J}_-\right] = 2\hbar\hat{J}_z\,,\ \left[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{J}_\pm\,,\ \left[\underline{\hat{J}}^2,\hat{J}_\pm\right] = 0\ . \tag{8.7}$$

(iii) $$\hat{J}_z\left(\hat{J}_\pm|\mathrm{jm}\rangle\right) = \hat{J}_z\hat{J}_\pm|\mathrm{jm}\rangle \overset{(8.7)}{=} (\pm\hbar\hat{J}_\pm + \hat{J}_\pm\underbrace{\hat{J}_z)|\mathrm{jm}\rangle}_{\mathrm{m}\hbar|\mathrm{jm}\rangle} = (\mathrm{m}\pm 1)\hbar\hat{J}_\pm|\mathrm{jm}\rangle \tag{8.8}$$

Also: Ist $|\mathrm{jm}\rangle$ EF der kommutierenden Operatoren $\underline{\hat{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ zu den EW $\hbar^2\,\mathrm{j(j+1)}$ bzw. $\hbar\mathrm{m}$, dann sind auch $\hat{J}_\pm|\mathrm{jm}\rangle$ EF dieser Operatoren, allerdings zu den EW $\hbar^2\,\mathrm{j(j+1)}$ und $\hbar(\mathrm{m}\pm 1)$.

Deshalb werden die Leiteroperatoren auch Auf- bzw. Absteigeoperatoren genannt: Mehrfache Anwendung von $\hat{J}_\pm$ auf $|\mathrm{jm}\rangle$ lässt j konstant, ändert aber m in ganzzahligen Schritten.

(iv) Wegen $\mathrm{m}^2 \leq \mathrm{j(j+1)}$, (ii), muss die Leiter in beiden Richtungen abbrechen. Also existiert für jedes j ein $m_{max}(j)$ und ein $m_{min}(j)$ mit

$$\hat{J}_+|\mathrm{jm}_{max}\rangle = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{J}_-|\mathrm{jm}_{min}\rangle = 0\,.$$

$\hat{J}_-$ angewendet auf die linke Relation ergibt $\underline{m_{max} = j}$, denn

$$0 = \hat{J}_-\hat{J}_+|jm_{max}\rangle = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)|jm_{max}\rangle = \left[J_x^2 + J_y^2 + i\underbrace{(\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x)}_{i\hbar\hat{J}_z}\right]|jm_{max}\rangle =$$

$$= (\hat{\underline{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z)|jm_{max}\rangle = \hbar^2[j(j+1) - m_{max}^2 - m_{max}]|jm_{max}\rangle.$$

Analog führt $\hat{J}_+\hat{J}_-|jm_{min}\rangle = 0$ auf $\underline{m_{min} = -j}$.

Da m sich in ganzzahlige Schritten ändert, muss $m_{max} - m_{min} = 2j$ eine ganze Zahl sein. Folglich ist

j ganz- oder halbzahlig $\underline{j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots.}$ (8.9)

und

m nimmt die Werte $\underline{m = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots, j-1, j}$ (8.10)

an.

Fazit: Drehimpulsoperatoren besitzen diskrete EW. Die Beträge der Drehimpulse sind $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots.$, ihre Komponenten ganzzahlige Vielfache von $\hbar$ mit $m = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots, \pm(j-1), \pm j$. Damit ist jeder Zustand mit gegebenem $\underline{J}^2$ genau (2 j +1) – fach entartet → Richtungsentartung.

In der "alten", Bohr-Sommerfeld´schen Quantenmechanik musste die aus klassischer Sicht verblüffende Richtungsquantelung zusätzlich postuliert werden.

behelfsmäßige Veranschaulichung: (halbklassisches Vektormodell mit "raumfestem" Vektor als Hilfskonstruktion)

Anschaulich "präzediert $\underline{J}$ um die z-Achse" auf einem Kegelmantel, da mit gegebenem $\hat{J}_z$ die Komponenten $\hat{J}_x$ und $\hat{J}_y$ nicht gleichzeitig scharf messbar sind. Der auf der Spitze stehende Kegel (Symmetrieachse ist die z-Achse) ist $\hbar m$ hoch, seine Mantellinie ist $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ lang und der Kegelradius ergibt sich also zu $\hbar\sqrt{j(j+1) - m^2}$.