Prof. Dr. Harald Engel
Judith Lehnert, Benjamin Lingnau, Maria Zeitz, Alexander Ziepke, ??

1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Fr. 24.04.2015 bis 14:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Fourierreihe*

Aus den mathematischen Methoden kennen Sie bereits die Taylorreihe zur Approximation von Funktionen in einer kleinen Umgebung. Eine andere Herangehensweise um speziell periodische Funktionen zu approximieren ist die sog. Fourierreihe. Eine mögliche Darstellung lautet

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right).$$

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k lassen sich für eine Funktion der Periode $2L$ durch

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \,\mathrm{d}x$$

berechnen.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe zu der Rechteckschwingung $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} h, & \text{wenn } 0 \leq x < L \\ -h, & \text{wenn } -L \leq x < 0 \end{cases} \quad \text{und } f(x+L) = f(x).$$

(b) Plotten Sie für $h = 1$ und $L = \pi$ mit einem Programm Ihrer Wahl (Mathematica, gnuplot...) die Fourierreihe bis zum (i) ersten, (ii) dritten und (iii) fünften Glied.
Der Ausgedruckte Code gehört zur Abgabe und wird bewertet!

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Dirac'sche Deltadistribution*
Die Delta-Distribution $\delta(x)$ ist durch ihre Wirkung auf Funktionen definiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \,\mathrm{d}x = f(x_0). \tag{1}$$

Anschaulich kann man sich einen sog. "Delta-Peak" vorstellen:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty\,, & x = x_0, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Betrachten Sie folgende Darstellungen der Deltadistribution:

(a) Die Darstellung über Gaußfunktionen: $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)$.

(b) Die Darstellung über Lorentzkurven: $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$ die Bedingungen (2) und (1) erfüllt.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Fourier-Transformation*
Die Fouriertransformation ist eng mit der Fourierreihe verknüpft. Bei nicht-periodischen Funktionen geht die Reihendarstellung in ein Integral über. Die Definition der Fourier-Transformation ist:

$$\begin{aligned} g(k) &= \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \ , \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \ . \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierten von $f(x) = 1$ und von $f(x) = \delta(x)$ mithilfe von Mathematica. Benutzen Sie dazu die Befehle `FourierTransform[ ]`und `DiracDelta[ ]`. Der Ausgedruckte Code ist Teil der Lösung und wird bewertet! Was fällt Ihnen bezüglich der Transformierten auf?

(b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Gaußverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ .$$

Diskutieren Sie kurz den Zusammenhang zwischen der Gaußfunktion und ihrer Fourier-Transformierten und vergleichen Sie die entsprechenden Halbwertsbreiten.
Hinweis: Benutzen Sie die quadratische Ergänzung, um die entsprechenden Integrale zu lösen.

(c) Plotten Sie mithilfe von Mathematica oder einem anderen Programm Ihrer Wahl (z. B. `gnuplot`) die Funktion $f(x)$ aus (c) sowie ihre Fourier-Transformierte $g(k)$ für den Erwartungswert $\mu = 0$ und die Varianz $\sigma = 0.5$.

(d) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte der Ableitung einer Funktion gilt:

$$\mathcal{F}(f') = ik\mathcal{F}(f) \ .$$

$f(x)$ sei dabei eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die ebenso wie alle ihre Ableitungen für $|x| \to \infty$ schneller verschwindet als jede Potenz von x.

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
08-10		EW 202 HE	EW 202 HE		
10-12				EW 229	EW 229
12-14	EW 114 EW 229			EW 229	EW 229
14-16					
16-18			EW 229		