Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 1

Abgabe: Do., 23.04.2015, 10 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 1. *Charakteristische Funktion, Momente, Kumulanten* (8 Punkte)

Die *charakteristische Funktion* der Wahrscheinlichkeitsdichte (oder -verteilung) $\varrho(x)$ einer Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$\phi(k) := \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kX} \right\rangle, \ k \in \mathbb{R},$$

wobei $\langle\cdot\rangle$ den Erwartungswert bezüglich der Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x)$ bezeichnet, explizit, falls die Ereignismenge von X reellwertig und kontinuierlich: $\langle\cdot\rangle := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \cdot \varrho(x)$. Die charakteristische Funktion $\phi(k)$ ist Erzeugende der *Momente* M_n via

$$M_n := \langle X^n \rangle = (-\mathrm{i})^n \left. \frac{\mathrm{d}^n \phi}{\mathrm{d}k^n} \right|_{k=0} =: (-\mathrm{i})^n \phi^{(n)}(0) \quad \text{und } \phi(0) = 1$$

(vgl. Vorlesung), analog erhält man aus $\ln \phi(k)$ die *Kumulanten* C_n:

$$\ln \phi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}k)^n}{n!} C_n$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion sowie die Momente M_1, M_2 und die Kumulanten C_1, C_2, C_3 der folgenden Verteilungen:

a) Gaussverteilung (kontinuierlich):

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \ x \in \mathbb{R};$$

kann es in diesem Fall nichtverschwindende Kumulanten für $n \geq 3$ geben?

b) Poissonverteilung (diskret):

$$\varrho(n) = \frac{\nu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\nu}, \ \nu \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 2. *Transformationsverhalten der Kumulanten* (7 Punkte)

Die Kumulanten C_n können auch als Funktionale der Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X aufgefasst werden, $C_n(X) := C_n[\varrho(x)]$. Zeigen sie die folgenden Eigenschaften:

a) Verschiebung:

i. $C_1(X + c) = C_1(X) + c, \ c = \text{const.}$;

ii. $C_n(X + c) = C_n(X), \ n \geq 2$

b) Homogenität: $C_n(cX) = c^n C_n(X),\ c = \text{const.}$

c) Additivität: $C_n(X_1 + X_2) = C_n(X_1) + C_n(X_2),\ X_1, X_2$ statistisch unabhängig

Aufgabe 3. *Zentraler Grenzwertsatz* (5 Punkte)

Diese Übung soll Ihnen helfen, sich die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes durch eigene Herleitung wieder ins Gedächtnis zu rufen: Seien $X_1, \ldots, X_N$ statistisch unabhängige und identisch verteilte (*engl.* i.i.d.), reellwertige Zufallsvariablen, die jeweils die (beliebige) Verteilung $\varrho(x_j)$ und Mittelwert $\mu := \langle X_1 \rangle \neq 0$ besitzen.

a) Drücken Sie die charakteristische Funktion $\phi_N(k)$ der Zufallsvariablen(-summe)

$$S_N := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (X_j - \mu)$$

durch $\phi_\mu(k) := \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(X_1 - \mu)} \right\rangle$ aus, und verwenden Sie eine Entwicklung, um zu zeigen:

$$\lim_{N \to \infty} \phi_N(k) = \exp\left\{ -\frac{(\langle X_1^2 \rangle - \mu^2)\, k^2}{2} \right\} \quad \forall\, k \in \mathbb{R}.$$

Was impliziert dieses Ergebnis für die Verteilung von S_N im Limes $N \to \infty$?

b) Was folgt für den Mittelwert μ_N und die relative Standardabweichung σ_N / μ_N der Zufallsvariablen $Y_N := \sum_{j=1}^{N} X_j$?

- **Vorlesung**: Do, Fr, 10-12 Uhr, in **EW 203**
- **Übung/Tutorium**: Mi, 10-12 Uhr, in **EW 731**
- **Kriterien für Scheinerwerb**: 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben, regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium, Präsentieren eigener Lösung(en).
- **Literatur:**

  * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
  * G. Röpke, *Statistische Thermodynamik des Nichtgleichgewichts* (Physik-Verlag, Weinheim, 1987)
  * H. Risken, T. Frank, *The Fokker-Planck Equation — Methods of Solution and Applications* (Springer, Berlin, 1996)
  * N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 2007)
  * C. W. Gardiner, *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences* (Springer, Berlin, 2009)
  * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
  * J. K. G. Dhont, *An Introduction to Dynamics of Colloids* (Elsevier, Amsterdam, 2003)