Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 5

Abgabe: Do., 28.05.2015, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 14. *Mittleres Auslenkungsquadrat für harmonisch gebundenes Teilchen* (6 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal die eindimensionale Bewegung eines Brown'schen Teilchens im harmonischen Potential (**Aufg. 12**), mit der Relation $\Gamma = 2k_\mathsf{B}T\gamma/m$. Berechnen Sie das mittlere Auslenkungsquadrat $\left\langle (x(t)-x_0)^2 \right\rangle$ für große Zeiten ($t \gg \tau_R := 1/\gamma$), wobei $\langle\cdot\rangle$ wieder den Erwartungswert bzgl. der Realisierungen der stochastischen Kraft $f(t)$ bezeichnet. Vergewissern Sie sich, dass der Virialsatz $\left\langle (x(t)-x_0)^2 \right\rangle = k_\mathsf{B}T/(m\omega_0^2)$ gilt.

Hinweis: Die stationäre Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion ist

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = \frac{k_\mathsf{B}T}{m}\mathsf{e}^{-\frac{\gamma|t_2-t_1|}{2}}\left[\cosh(\Delta|t_2-t_1|) - \frac{\gamma}{2\Delta}\sinh(\Delta|t_2-t_1|)\right],\ \Delta := \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$$

Aufgabe 15. *(Überdämpfte) Langevin-Dynamik für Orientierung* (8 Punkte)

Gegeben sei ein kugelförmiges Brownsches Teilchen (Trägheitsmoment Θ) mit einem Orientierungsfreiheitsgrad, z. B. einem permanenten magnetischem Moment $\underline{\mu}$. Hier soll die Zeitentwicklung des normierten Orientierungsvektors $\underline{n}$ ($\underline{n} := \underline{\mu}/|\underline{\mu}|$ für das genannte Beispiel) untersucht werden. Zunächst formulieren wir in Analogie zur Brownschen Translationsbewegung eine Langevin-Gleichung für die Rotation mit momentaner Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}(t)$: Das Drehmoment $\underline{T} = \Theta\dot{\underline{\omega}}$ setzt sich zusammen aus einem Reibungsterm linear in $\underline{\omega}$, mit Koeffizient $\zeta^{(\mathsf{rot})}$, und einem stochastischen Drehmoment $\underline{T}^{(\mathsf{rot})}$:

$$\Theta\dot{\underline{\omega}}(t) = -\zeta^{(\mathsf{rot})}\underline{\omega}(t) + \underline{T}^{(\mathsf{rot})}(t), \tag{1}$$
$$\left\langle \underline{T}^{(\mathsf{rot})}(t)\right\rangle = \underline{0},\ \left\langle T_\alpha^{(\mathsf{rot})}(t_1)T_\beta^{(\mathsf{rot})}(t_2)\right\rangle = \Gamma^{(\mathsf{rot})}\delta_{\alpha\beta}\delta(t_1-t_2)$$

a) Leiten Sie aus der einzeitigen Winkelgeschwindigkeitskorrelation im Gleichgewicht, $\lim_{t\to\infty}\left\langle (\omega_\alpha(t))^2\right\rangle$, und der Gleichverteilung für die kinetische Energie der Rotation, $(\Theta/2)\sum_\alpha \omega_\alpha^2$, die Fluktuations-Dissipations-Relation $\Gamma^{(\mathsf{rot})} = 2k_\mathsf{B}T\Theta\,\zeta^{(\mathsf{rot})}$ her.

b) Im überdämpften Limes kann der Winkelbeschleunigungsterm in Glg. (1) vernachlässigt werden. Geben Sie für diesen Limes mithilfe von $\underline{\omega}(t)$ die Bewegungsgleichung für $\underline{n}(t)$ an, und zeigen Sie, dass der stochastische Term in dieser Langevin-Gleichung *multiplikativ* ist (vgl. Vorlesung).

Aufgabe 16. *Eigenschaften des Wiener-Inkrements* (6 Punkte)

Sei $f(t)$ eine (skalare) stochastische Kraft mit $\langle f(t)\rangle = 0$ und $\langle f(t_1)f(t_2)\rangle = \Gamma\delta(t_1 - t_2)$. Zeigen Sie, dass das *Wiener-Inkrement*

$$W(\tau) := \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}s f(s),\ \tau \geq 0$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) $\langle W(\tau)\rangle = 0$

b) $\left\langle \left(W(\tau)\right)^2 \right\rangle = \Gamma\tau$

c) $\langle W(\tau)W(\sigma)\rangle = \Gamma \min(\tau, \sigma)$