Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 6

Abgabe: Do., 04.06.2015, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 17. *Kramers-Moyal-Koeffizienten* (15 Punkte)

Die *Kramers-Moyal-Koeffizienten* stellen einen Zusammenhang her zwischen der integralen Form der verallgemeinerten Langevin-Gleichung (stochastische Bewegungsgleichung)

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t' \left\{ h_i\big(\{\underline{x}(t')\}, t'\big) + \sum_j D_{ij}\big(\{\underline{x}(t')\}, t'\big) f_j(t') \right\}$$

und der Fokker-Planck-Gleichung für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte.

a) Berechnen Sie den *zweiten* Kramers-Moyal-Koeffizienten

$$K_{ij}^{(2)}\big(\{\underline{x}(t)\}, t\big) := \frac{1}{2} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \Big\langle \big(x_i(t+\tau) - x_i(t)\big)\big(x_j(t+\tau) - x_j(t)\big) \Big\rangle,$$

indem Sie, wie in der Vorlesung für den ersten Koeffizienten gezeigt, die Funktionen $h_i\big(\{\underline{x}(t')\}, t'\big)$ und $D_{ij}\big(\{\underline{x}(t')\}, t'\big)$ um den deterministischen Wert $\underline{x}(t)$ entwickeln. Nehmen Sie wieder eine stochastische Kraft an, die vollständig bestimmt ist durch $\langle f_i(t)\rangle = 0$ und $\langle f_i(t_1) f_j(t_2)\rangle = \Gamma\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2)$, und verwenden Sie bei der Diskretisierung von stochastischen Integralen die Stratonovich-Auswertung.

Das Ergebnis ist:

$$K_{ij}^{(2)}\big(\{\underline{x}(t)\}, t\big) = \frac{\Gamma}{2} \sum_k D_{ik}\big(\{\underline{x}(t)\}, t\big) D_{jk}\big(\{\underline{x}(t)\}, t\big)$$

b) Zeigen Sie, dass für jede stochastische Kraft mit Gaußverteilung (Kumulanten $C_n = 0$ für $n \geq 3$) die Kramers-Moyal-Koeffizienten höherer Ordnung verschwinden:

$$\begin{aligned} K_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{(n)}\big(\{\underline{x}(t)\}, t\big) :=& \frac{1}{n!} \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \Big\langle \big(x_{i_1}(t+\tau) - x_{i_1}(t)\big) \cdot \ldots \cdot \big(x_{i_n}(t+\tau) - x_{i_n}(t)\big) \Big\rangle \\ =& \, 0 \;\forall n \geq 3 \end{aligned}$$