Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. f. Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 8

Abgabe: Do., 18.06.2015, 10:15 Uhr, in/vor der Vorlesung
Bitte Lösungen großzügig kommentieren und mit Namen versehen!

Aufgabe 20. *Kramers-Klein-Gleichung für harmonisches Potential* (7 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal den eindimensionalen Brownschen harmonischen Oszillator, diesmal nicht überdämpft:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t)\\ \dot{v}(t) &= -\gamma v(t) - \omega_0^2 x(t) + f(t)\end{aligned}$$

Geben Sie die Kramers-Klein-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x, v, t)$ an, und bestimmen Sie eine stationäre Lösung, z. B. mithilfe der in **Aufgabe 21.** vorgestellten Methode der *Charakteristiken*.

Aufgabe 21. *Brownsche Bewegung in einer Scherströmung* (13 Punkte)

Ein Brownsches Teilchen befinde sich in einem Fluid mit stationärem, homogenem, linearen Geschwindigkeitsprofil $u_F(y) = \dot{\gamma}y$, $v_F = w_F = 0$, d.h., die Fluidgeschwindigkeit zeigt überall in x-Richtung und ändert sich nur in y-Richtung mit der konstanten Scherrate $\dot{\gamma}$.

a) Die Smoluchowski-Gleichung für die überdämpfte Bewegung des Brownschen Teilchens im gescherten Fluid lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\underline{r}, t) = \left\{ D\nabla^2 - \dot{\gamma} y \frac{\partial}{\partial x} \right\} P(\underline{r}, t), \text{ mit } \underline{r} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Welches ist hier also die Kraft $\underline{F}(\underline{r}, t)$ in der allgemeinen Form der Smoluchowski-Gleichung? Ist $\underline{F}$ als Gradient eines Potentials darstellbar?

b) Verwenden Sie wieder einen Separationsansatz, um zu zeigen, dass $P(x, y, z, t) = \phi(x, y, t)\chi(z, t)$, wobei $\chi(z, t)$ die bekannte Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung ohne Scherung ist. Stellen Sie die Gleichung für $\phi(x, y, t)$ auf. Nach Fouriertransformation bezüglich der Ortsvariablen sollten Sie erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\phi}(k_x, k_y, t) = \left\{ -D(k_x^2 + k_y^2) + \dot{\gamma} k_x \frac{\partial}{\partial k_y} \right\} \tilde{\phi}(k_x, k_y, t) \tag{1}$$

c) Zur Lösung von Glg. (1) können Sie die Methode der *Charakteristiken* verwenden: Fasst man $\tilde{\phi}$ als Funktion von k_y und t auf und k_x als Parameter, lässt sich Glg. (1) entlang der parametrisierten Kurven $t = s$ und $k_y = K - \dot{\gamma} k_x s$, wobei K der Parameter der Kurvenschar ist, in die gewöhnliche DGL $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tilde{\phi} = -Dk^2(s)\tilde{\phi}$ (mit $k^2 := k_x^2 + k_y^2$) überführen. Lösen Sie die Gleichung allgemein mithilfe einer (zunächst unbekannten)

Funktion $C(K)$, die aus den Anfangsbedingungen $\phi(x, y, t = 0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ und $k_y = K$ für $t = 0$ bestimmt werden kann. Die Lösung im Fourierraum ist

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(k_x, k_y, t) = & \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} k_x x_0 + \mathrm{i}\,(k_y + \dot{\gamma} k_x t)\, y_0} \\ & \times \exp\left\{-D\left[k_x^2\left(1 + \frac{(\dot{\gamma} t)^2}{3}\right) t + k_y^2 t + k_x k_y \dot{\gamma} t^2\right]\right\}\end{aligned}$$

d) Vergleichen Sie das Ergebnis in x-Richtung mit der Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung ohne externe Kraft, um den effektiven Diffusionskoeffizienten $D_{x,\text{eff}}(t)$ unter Scherung zu bestimmen (sog. Taylor-Dispersion, vgl. Vorlesung).