

Prof. Dr. Andreas Knorr
 Dr. Alexander Carmele
 Dr. Florian Wendler

6. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Mo. 13.06.2016 bis 10:00 Uhr in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Quantisierung der Elektron-Phonon Wechselwirkung

Der Hamiltonoperator der Elektron-Phonon Wechselwirkung lautet in 2. Quantisierung:

$$(1) \quad H_{\text{el-ph}} = \sum_{1,2} \sum_n \langle 1 | \vec{u}_n \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}_n} V_{\text{el-ion}}(\vec{r} - \vec{R}_n^0) | 2 \rangle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$(2) \quad \hat{H}_{\text{el-ph}} = \hbar \sum_{\lambda,j,\vec{k},\vec{q}} g_{\vec{q}j} \left(\hat{b}_{j,\vec{q}}^\dagger + \hat{b}_{j,-\vec{q}} \right) \hat{a}_{\lambda,\vec{q}+\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\lambda,\vec{k}}$$

$$(3) \quad \text{mit } g_{\vec{q}j} = -i \left(1 / (2m\omega_j(\vec{q})) \right)^{1/2} \vec{A}_j \cdot \vec{q} V_{\vec{q}}$$

Vorgehensweise:

- Das periodische Potential $V_{\text{el-ion}}(\vec{r} - \vec{R}_n^0)$ als Fourierreihe $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{R}_n^0)} V_{\vec{q}} \right)$ schreiben.
- Auslenkung

$$(4) \quad \vec{u} = \sum_{j,\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_j(\vec{q})mN}} \vec{A}_j(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \left(\hat{b}_{j,\vec{q}}^\dagger + \hat{b}_{j,-\vec{q}} \right)$$

einsetzen und $\vec{\nabla}$ wirken lassen, n -Summe auswerten (\rightarrow Kronecker).

- Für $|2\rangle$ und $\langle 1|$ Blochfunktionen einsetzen und über Einheitszellen auswerten (\rightarrow Kronecker).
- Nach Indexumbenennungen erhält man das Ergebnis.

(b) Interpretieren Sie das Ergebnis anhand einer Pfeilskizze.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Operatoren in zweiter Quantisierung: Bose-Operatoren

In der zweiten Quantisierung werden für das Schrödingerfeld

$$(5) \quad \hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_i \varphi_i(\vec{r}) \hat{b}_i^\dagger(t), \quad \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}) \hat{b}_i^\dagger(t)$$

Vertauschungsrelationen eingeführt:

$$(6) \quad [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)]_- = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{Bosonen,}$$

$$(7) \quad [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)]_+ = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{Fermionen.}$$

1. Zeigen Sie explizit durch Einsetzen der Entwicklung der Wellenfunktion, dass die bosonische Kommutatorrelation $[\hat{b}_{i,\vec{q}}, \hat{b}_{j,\vec{q}'}^\dagger]_- = \delta_{\vec{q},\vec{q}'} \delta_{i,j}$ erfüllt ist.
2. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der quantisierten Auslenkung $\langle \hat{u} \rangle$ verschwindet und dass im Gegensatz dazu die Standardabweichung $\sigma^2 = \langle (\langle \hat{u} \rangle - \hat{u})^2 \rangle$ ungleich null ist, wobei die Auslenkung durch Glg. (4) gegeben ist.

Bitte Rückseite beachten! \rightarrow

6. Übung TPVI SS2016

3. Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass für bosonische Operatoren $\hat{b}^{(\dagger)}$ gilt:

$$(8) \quad \hat{b}\hat{b}^{\dagger n} - \hat{b}^{\dagger n}\hat{b} = \frac{\partial(\hat{b}^{\dagger n})}{\partial\hat{b}^{\dagger}}.$$

4. Zeigen Sie, dass für folgende Transformation des bosonischen Vernichters mit der e-Funktion gilt:

$$(9) \quad e^{-\alpha\hat{b}^{\dagger}}\hat{b}e^{\alpha\hat{b}^{\dagger}} = \hat{b} + \alpha.$$

Vorlesung:

- Dienstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203
- Donnerstag 8:15 Uhr – 10:00 Uhr im EW 203

Übung:

- Mo 10:15-11:45 EW 731

Scheinkriterien: • Mindestens 60% der Übungspunkte.

Zettel:

- Ausgabe: Montags in der Übung.
- Abgabe: 14 Tage später in der Übung .
- Abgabe der Übungszettel in 2- oder 3-er Gruppen!

Sprechzeiten:

- Prof. Dr. Andreas Knorr: Di, 13–14 Uhr im EW 742
- Dr. Alexander Carmele : Fr, 10–11 Uhr im EW 704
- Dr. Florian Wendler : Mo, 12–13 Uhr im ER 221

Literatur

- Ashcroft, Mermin: Festkörperphysik (Oldenbourg)
- Czycholl: Theoretische Festkörperphysik (Springer)
- Haken: Quantenfeldtheorie des Festkörpers (Teubner)
- Haug, Koch: Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors (World Scientific)
- Ibach, Lüth: Festkörperphysik (Springer)
- Jäger, Valenta: Festkörpertheorie (Wiley)
- Kittel: Quantenfeldtheorie des Festkörpers (Oldenbourg)
- Rössler: Solid State Theory (Springer)
- Scherz: Quantenmechanik (Teubner)
- Ziman: Prinzipien der Festkörpertheorie (Deutsch)