Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 6. Juli 2015

Dr. Marten Richter
Dr. Julia Kabuß

12. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mo. 13.07.2015 vor Beginn der Übung im EW 226
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Bonusaufgabe 1 (10 Punkte): *Polaritonen: Hopfield-Transformation*

Betrachten Sie den Hamiltonoperator für ein System aus miteinander gekoppelten Photonen $c_k^{(\dagger)}$ und TO-Phononen $b_k^\dagger$.

$$H_0 = \sum_k \varepsilon_k^{pt} c_k^\dagger c_k + \sum_k \varepsilon_k^{pn} b_k^\dagger b_k, \tag{1}$$

$$H_{ww} = \sum_k \varepsilon_k^{ww} \left(c_k^\dagger b_k - c_k b_k^\dagger - c_k b_{-k} + c_{-k}^\dagger b_k^\dagger \right) \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass mithilfe der Hopfield Transformation

$$\alpha_k = w c_k + x b_k + y c_{-k}^\dagger + z b_{-k}^\dagger, \tag{3}$$

der Hamiltonoperator aus Gleichungen (1) und (2) diagonalisiert werden kann, also in folgende Form gebracht werden kann:

$$H^d = \sum_k \left(\varepsilon_{k,1} \alpha_{k,1}^\dagger \alpha_{k,1} + \varepsilon_{k,2} \alpha_{k,2}^\dagger \alpha_{k,2} \right) \tag{4}$$

1. Berechnen Sie dazu zunächst die Kommutatoren $[\alpha_k, H^d]$, $[\alpha_k, H_0]$ und $[\alpha_k, H_0]$.

2. Zur Diagonalisierung von H fordern Sie nun $[\alpha_k, H_0] + [\alpha_k, H_{ww}] \stackrel{!}{=} [\alpha_k, H^d]$ und schreiben Sie diese Gleichung in Matrixform in Bezug auf die Photon- und Phononoperatoren.

3. Berechnen Sie die Determinante der Koeffizienten und bestimmen daraus Sie die Dispersionsrelation ε_k^{pol} der neuen Quasiteilchen.

4. Skizzieren und diskutieren Sie die Polariton-Dispersionsrelation im Vergleich mit der Dispersion für die ungestörten Photonen und TO-Phononen.

Bitte Rückseite beachten!⟶

12. Übung TFKP SS15

Bonusaufgabe 2 (10 Punkte): *Quantisiertes Lichtfeld: Vertauschungsrelationen*

Das quantisierte Elektrische- und Magnetfeld sind gegeben als:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \hat{\epsilon}^{\lambda}_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + h.c., \tag{5}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_{\vec{k},\lambda} \vec{k} \times \hat{\epsilon}^{\lambda}_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + h.c. \tag{6}$$

hierbei ist $\hat{\epsilon}^{\lambda}_{\vec{k}}$ der Vektor für die Polarisationerichtung, $\lambda \in 1,2$ indiziert jeweils die beiden Polarisationsrichtungen für die transversalen Felder und $E_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}}$. Die Photonoperatoren erfüllen bosonischen Vertauschungsrelationen:

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}',\lambda'}] = [a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = 0, \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{7}$$

Berechnen Sie ausgehen von Gleichungen (5)-(7) die Vertauschungsrelationen zwischen dem Elektrischen- $\vec{E}(\vec{r},t)$ und dem Magnetfeld $\vec{H}(\vec{r},t)$:

1. Für parallele Komponenten der Felder $[E_i(\vec{r},t), H_i(\vec{r'},t)] = 0$.
2. Für senkrechte Komponenten der Felder $[E_i(\vec{r},t), H_j(\vec{r'},t)] = -i\hbar c^2 \frac{\partial}{\partial m}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'})$, wobei i, j, m zyklische Permutationen der kartesischen Koordinaten.

Tipp: Benutzen Sie, dass für das Dyadische Produkt von Einheitsvektoren gilt $\sum_i \vec{e}_i\vec{e}_i = 1$ und somit auch für die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \hat{\epsilon}^1_{\vec{k}}$, $\vec{e}_2 = \hat{\epsilon}^2_{\vec{k}}$ and $\vec{e}_3 = \frac{\vec{k}}{k}$.