

Dr. Marten Richter
Dr. Julia Kabuß

5. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I+II

Abgabe: Mo. 01.06.2015 vor Beginn der Übung im EW 226

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte Matrikelnummer auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Quantisierung der Elektron-Phonon Wechselwirkung

Der Hamiltonoperator der Elektron-Phonon Wechselwirkung lautet in 2. Quantisierung:

$$H_{\text{el-ph}} = \sum_{1,2} \sum_n \langle 1 | \vec{u}_n \cdot \vec{\nabla}_{\vec{R}_n} V_{ei}(\vec{r} - \vec{R}_n) | 2 \rangle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\hat{H}_{\text{el-ph}} = \hbar \sum_{\lambda, l, \vec{k}, \vec{q}} g_{\vec{q}l} \left(\hat{b}_{l, -\vec{q}}^\dagger + \hat{b}_{l, \vec{q}} \right) \hat{a}_{\lambda, \vec{q} + \vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\lambda, \vec{k}}$$

mit $g_{\vec{q}l} = -i (1/(2m\omega_l(g)))^{1/2} \vec{A}_l \cdot \vec{q} V_{\vec{q}}$

Vorgehensweise:

- Das periodische Potential $V_{ei}(\vec{r} - \vec{R}_n)$ als Fourierreihe $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{r} - \vec{R}_n)} V_{\vec{q}} \right)$ schreiben.
- \vec{u}_n aus der VL einsetzen und $\vec{\nabla}$ wirken lassen, n -Summe auswerten (\rightarrow Kronecker).
- Für $|2\rangle$ und $\langle 1|$ Blochfunktionen einsetzen und über Einheitszellen auswerten (\rightarrow Kronecker).
- Nach Indexumbenennungen erhält man das Ergebnis.

(b) Interpretieren Sie das Ergebnis anhand einer Pfeilskizze.

Aufgabe 8 (3 Punkte): Projektoreigenschaften

In der VL wurden die Superoperatoren P und Q eingeführt, mit den Eigenschaften:

$$(1) \quad P\rho = \text{tr}_B(\rho) \otimes \rho_B^0 = \rho_S \otimes \rho_B^0, \quad P + Q = 1,$$

wobei ρ_B^0 einen GG-Zustand des Bads darstellt und ρ_S den Zustand des (relevanter Anteil) Systems beschreibt. Zeigen Sie mithilfe von Gleichung (2) folgende Eigenschaften:

1. $P^2 = P$,
2. $Q^2 = Q$,
3. $P \cdot Q = 0$

5. Übung TFKP SS15

Aufgabe 9 (8 Punkte): Superoperatoren im Liouville-Raum

Zeigen Sie, dass bei der Anwendung der Projektionsoperatoren P und Q auf den Superoperator mit den Eigenschaften

$$(2) \quad H_- \rho = [H, \rho], \quad H_- = H_{S-} + H_{B-} + H_{SB-}$$

gilt:

1. $PH_{S-} = H_{S-}P$ und $QH_{S-} = H_{S-}Q$,
2. $PH_{B-} = H_{S-}P = 0$,
3. $QH_{B-} = H_{B-}$,
4. $\text{tr}_B(H_{SB}\rho_B^0) = 0$ im GG, (H_{SB} lineare System-Bad-Wechselwirkung)
5. $PH_{SB-}P = 0$,
6. $PH_-P = PH_{S-}P$
7. $PH_-Q = PH_{SB-}Q$
8. $QH_-P = QH_{SB-}P$

Tip: Lassen Sie die Ausdrücke auf einen beliebigen Operator O wirken und führen Sie die Spur wenn nötig aus. Nutzen Sie 2., um 3. zu zeigen und 4. um 5. zu zeigen. Mit 1., 2. und 4. können Sie 6., 7. und 8. beschreiben.

Aufgabe 10 (5 Punkte): Zeitgeordneter Propagator

Zeigen Sie mithilfe der Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d}{dt}\mathcal{G}(t, s) = -\frac{i}{\hbar}QH_{SB-}(t)\mathcal{G}(t, s),$$

dass der Zeitentwicklungsoperator $\mathcal{G}(t, s)$ durch das zeitgeordnete Exponential

$$(4) \quad \mathcal{G}(t, s) \equiv T_{\leftarrow} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_s^t ds QH_{SB-}(s)\right]$$

gegeben ist.