Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 10. Mai 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (4+2+2+3=11 Punkte): *Potential-Streuung*
Wir betrachten ein stückweise stetiges Potential $V(x)$ und die Lösungen der Schrödinger-Gleichung in den jeweiligen Intervallen,

$$V(x) = \begin{cases} V_1, \\ V_2, \\ ... \\ V_N \\ V_{N+1} \end{cases} \quad ... \quad \psi(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, & -\infty < x \le x_1 \\ a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, & x_1 < x \le x_2 \\ ... & ... \\ a_N e^{ik_N x} + b_N e^{-ik_N x}, & x_{N-1} < x \le x_N \\ a_{N+1} e^{ik_{N+1} x} + b_{N+1} e^{-ik_{N+1} x}, & x_N < x < \infty \end{cases},$$

wobei

$$k_j = \sqrt{(2m/\hbar^2)\,(E - V_j)}.$$

Wir betrachten den Fall $E > V_1, V_{N+1}$, so dass k_1 und k_{N+1} reelle Wellenvektoren sind und $\psi(x)$ laufende, ebene Wellen außerhalb des *Streugebiets* $[x_1, x_N]$ beschreiben.

Wir wollen nun Lösungen der SG unter der Streubedingung $b_{N+1} = 0$ bestimmen, d.h. wir suchen Lösungen, die auf der rechten Seite des Streugebiets nach rechts laufen, aber keinen Anteil aufweisen, der von rechts einläuft.

(a) Benutzen Sie die Stetigkeit von $\psi(x)$ und ihrer Ableitung $\psi'(x)$ und zeigen Sie, dass sich zwei Gleichungen ergeben, die sich in der Matrix-Form

$$\mathbf{u}_1 = T^1 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

mit

$$T^1 = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) e^{i(k_2 - k_1) x_1} & (k_1 - k_2) e^{-i(k_1 + k_2) x_1} \\ (k_1 - k_2) e^{i(k_2 + k_1) x_1} & (k_1 + k_2) e^{-i(k_2 - k_1) x_1} \end{pmatrix}$$

schreiben lassen.

(b) Zeigen Sie, dass sich die Wellenfunktion auf der linken Seite mit der auf der rechten Seite des Streugebiets mit Hilfe der Transfer-Matrix M verbinden läßt, wobei

$$\mathbf{u}_1 = M \mathbf{u}_{N+1}, \quad M = T^1 T^2 ... T^N$$

und die T^i sowie $\mathbf{u}_{N+1}$ analog zu oben zu definieren sind.

(c) Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (siehe Aufgabe 3) und zeigen Sie

$$\begin{aligned} j(x > x_N) &= \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}(ik_{N+1} |a_{N+1}|^2) = |a_{N+1}|^2 \frac{\hbar k_{N+1}}{m} \\ j(x < x_1) &= \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left[(a_1^* e^{-ik_1 x} + b_1^* e^{ik_1 x}) ik_1 (a_1 e^{ik_1 x} - b_1 e^{-ik_1 x}) \right] = \frac{\hbar k_1}{m} [|a_1|^2 - |b_1|^2]. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x > x_N)$ beschreibt eine Fluß rechts vom Streugebiet nach $x \to \infty$. Auf der anderen Seite ist $j(x < x_1)$ auf der linken Seite die Differenz eines einfließenden, positiven Stroms (einfallende Teilchen) und eines ausfließenden, negativen Stroms (reflektierte Teilchen).

(d) Der Transmissions-Koeffizient T und der Reflexions-Koeffiziente R sind definiert als das Verhältnis vom Strom der transmittierten bzw. reflektierten Welle zum Strom der einfließenden Welle

$$T := \frac{k_{N+1}}{k_1} \left| \frac{a_{N+1}}{a_1} \right|^2, \qquad R := \left| \frac{b_1}{a_1} \right|^2 .$$

Zeigen Sie damit, dass

$$T = \frac{k_{N+1}}{k_1} \frac{1}{|M_{11}|^2}, \qquad R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2$$
$$\text{und} \quad T + R = 1$$

gilt, wobei M_{ij} die Einträge der Transfer-Matrix M sind.

Aufgabe 2 (3+3+4=10 Punkte): *Streuung an Rechteck-Barriere*

Wir untersuchen die Streuung eines quantenmechanischen Teilchens mit Masse m und Energie E an einer Rechteck-Barriere der Höhe $V > 0$ und Breite $2a$, indem wir den soeben hergeleiteten Transfermatrix-Formalismus mit

$$N = 2, \qquad x_1 = -a, \quad x_2 = a, \qquad V_1 = 0, \quad V_2 = V, \quad V_3 = 0$$

verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass für das obere linke Element der durch $M = T_1 T_2$ gegebenen Transfermatrix

$$M_{11} = e^{2ik_1 a} \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \; i \; \sin(-2k_2 a) + \cos(2k_2 a) \right]$$

gilt und berechnen Sie anschließend das Betragsquadrat $|M_{11}|^2$.

(b) Bestimmen Sie nun den Transmissionskoeffizienten T für die drei Fälle $E < V$, $E = V$ und $E > V$. Formulieren Sie ihr Ergebnis als Funktion von E/V und $\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} a^2 V}$.

(c) Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten $T(E)$ als Funktion der Energie und vergleichen Sie das erhaltene quantenmechanische Resultat mit dem der klassischen Mechanik.

Aufgabe 3 (3 Punkte): *Kontinuitätsgleichung*

Leiten Sie aus der Schrödinger–Gleichung die dreidimensionale Version der Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ her:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Zeigen Sie dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} \left[\Psi^*(\mathbf{x}, t) \, \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \, \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t) \right]$$