Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 17. Mai 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (1+4+5 Punkte): *Eindimensionales Kastenpotential*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Funktionen

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x) \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{\pi n}{L}$$

Lösungen der stationären Schrödingergleichung im eindimensionalen Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$ sind.

1. Der Zustand $|\phi\rangle$ sei durch die Wellenfunktion im Interval $x \in [0, L]$

   $$\phi(x) = N\, x(L - x)$$

   gegeben. Bestimmen Sie die Konstante N so, dass der Zustand normiert ist.

2. Beweisen Sie nun die Formel

   $$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} .$$

   Tipp: Entwickeln Sie den Zustand $|\phi\rangle$ nach den Eigenfunktionen $|\psi_n\rangle$ und werten Sie die Gleichung bei $x = L/2$ aus. Lösen Sie die auftretenden Integrale durch partielle Integration (auf die Grenzen achten).

3. Betrachten Sie die Zeitentwicklung des Anfangzustands $\psi(x, t = 0) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$. Wie lautet $\psi(x, t)$? Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x, t)|^2$ und plotten Sie diese für $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, $\hbar = 1$ und $L = 1$ für ca. 5 verschiedene t-Werte zwischen 0 und 0.3.

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Cauchy-Folgen*

Der Vektorraum $C([0, 1])$ der komplexwertigen, auf dem reellen Intervall $[0, 1]$ definierten stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $x \to f(x)$ mit der 'Quadrat-Norm' $\|\psi\|_2 \equiv \sqrt{\int_0^1 dx |\psi(x)|^2}$ ist *kein* Banachraum, d.h. *nicht* vollständig, denn es gibt Cauchy-Folgen, die gegen unstetige Funktionen $f \notin \mathbf{C}([0, 1])$ konvergieren. Konstruieren Sie ein solches Beispiel.

Aufgabe 3 (6 Punkte): *Vollständigkeit des Hilbertraums $l^2(\mathbb{C})$*

Als natürliche Verallgemeinerung des $\mathbb{C}^n$ betrachten wir den Vektorraum

$$l^2(\mathbb{C}) := \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathbb{C}^{\infty}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots), \quad z_i \in \mathbb{C} \;\middle|\; \|z\|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty \right\}.$$

Für Elemente $x,\ y \in l^2(\mathbb{C})$ definieren wir ein Skalarprodukt gemäß

$$(x,\, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*\, y_i.$$

Zeigen Sie nun, dass der Prä-Hilbertraum

$$\big(l^2(\mathbb{C}),\ (\cdot,\, \cdot)\big)$$

vollständig ist, d.h. er ist ein Hilbertraum.

Hinweis: Jedem Element x eines Prä-Hilbertraums lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes eine Norm $||x|| := \sqrt{(x,x)}$ zuordnen. Zum Beweis der Vollständigkeit von $l^2(\mathbb{C})$ muss gezeigt werden, dass jede Cauchy-Folge $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $l^2(\mathbb{C})$ für $n \to \infty$ gegen ein $x \in l^2(\mathbb{C})$ konvergiert.