Prof. Dr. Tobias Brandes
Dr. Judith Lehnert, Dr. Marten Richter, Mathias Hayn, Alexander Kraft
Sina Böhling, Jonas Rezacek

5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Di. 31. Mai 2016 vor der Vorlesung im Hörsaal EW 201

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden **Zwischenschritte** *und* **ausführliche Kommentare** *zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es Punkte! Die Zettel müssen in 3er-Gruppen abgegeben werden. Bitte geben Sie Ihre Namen, Matrikelnummern und das Tutorium an!*

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Grundzustand des harmonischen Oszillators*
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der eindimensionale harmonische Oszillator mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a ausgedrückt werden kann:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \qquad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\,.$$

Berechnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustands im Ortsraum, $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$, indem Sie die Gleichung $a|0\rangle = 0$ ausnutzen.

Aufgabe 2 (6+4=10 Punkte): *Kohärente Zustände*
Der kohärente Zustand $|z\rangle$ ist definiert durch (Skript 2.6.3)

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

(a) Berechnen Sie für den 1d harmonischen Oszillator die Zeitentwicklung $|\Psi(t>0)\rangle$ eines kohärenten Zustandes $|\Psi(t=0)\rangle = |z\rangle$ für ein gegebenes komplexes z. Skizzieren Sie die Zeitentwicklung in der komplexen Ebene.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(n)$, im kohärenten Zustand $|\Psi(t)\rangle$ eine Anzahl von n Energie-Quanten (Photonen, Phononen) zu finden.

Aufgabe 3 (1+2+6=9 Punkte): *Matrixdarstellung von Operatoren und Basiswechsel*
Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren mit vollständigen, orthonormierten Eigensystemen $\{|a_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $\{|b_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ und nichtentarteten Eigenwerten α_n und β_n.

(a) $|\psi\rangle$ sei in der $\hat{A}$-Darstellung gegeben, d.h. $|\psi\rangle = \sum_n a_n|a_n\rangle$ wobei gilt $a_n = \langle a_n|\psi\rangle$. Welche Form hat $|\psi\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung? Bestimmen Sie also $b_n = \langle b_n|\psi\rangle$ als Funktion der Koeffizienten a_n und der Basisvektoren $\{|b_n\rangle\}$ und $\{|a_n\rangle\}$.

(b) Welche Form hat der Operator $\hat{A}$ in der $\hat{A}$-Darstellung und in der $\hat{B}$-Darstellung?

(c) Seien $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Der Vektor $|\psi_A\rangle = 5\,|-1\rangle + 3\,|1\rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ sei in der $\hat{A}$-Darstellung gegeben, wobei $|-1\rangle$ der Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $|1\rangle$ der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist. Berechnen Sie $|\psi_A\rangle$ in der $\hat{B}$-Darstellung und den Operator $\hat{A}$ in beiden Darstellungen.