

Kapitel 4

Zur mikroskopischen Erklärung der Entropie

4.4 Spinsysteme im thermischen Kontakt

b) Schärfe des Maximums:

bei $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ (s. Gl. (4.24))

• maximale Zustandszahl:

$$\begin{aligned}
 (g_1 g_2)_{\max} &= g_1(\hat{n}_1, N_1) g_2(\underbrace{n - \hat{n}_1}_{\hat{n}_2}, N_2) \\
 &\stackrel{(4.11)}{=} g_1(0, N_1) g_2(0, N_2) \exp\left(-\underbrace{\frac{2\hat{n}_1^2}{N_1}}_{=\hat{n}_1 \frac{n}{N}} - \underbrace{\frac{2\hat{n}_2^2}{N_2}}_{=\hat{n}_2 \frac{n}{N}}\right) \quad \text{mit (4.24)}
 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\hat{n}_1 + \hat{n}_2 = n} \boxed{(g_1 g_2)_{\max} = g_1(0, N_1) g_2(0, N_2) \exp\left(-\frac{2n^2}{N}\right)} \quad (4.26)$$

• Schwankungen um $\hat{n}_1, \hat{n}_2$: mit $n_1 = \hat{n}_1 + \delta, n_2 = \hat{n}_2 - \delta$

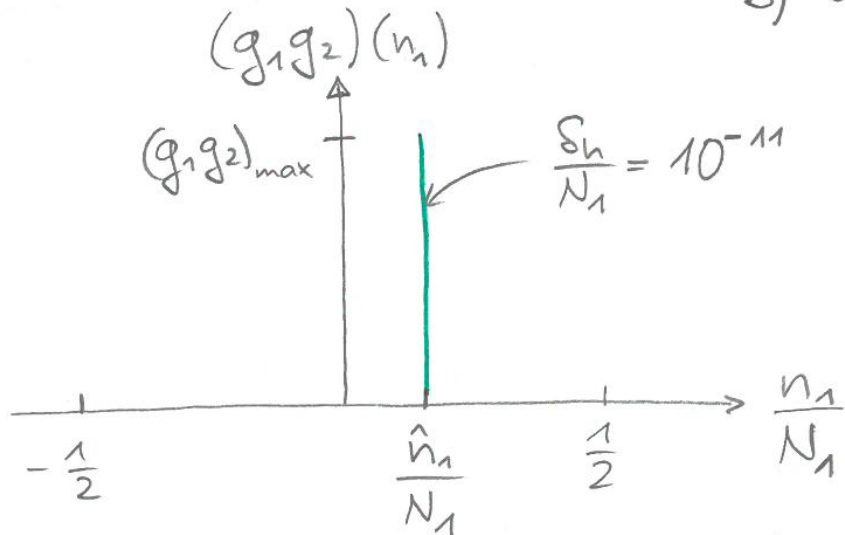
$$\xrightarrow[\text{(4.11), (4.26)}]{\text{o.B.}} \boxed{g_1(\hat{n}_1 + \delta, N_1) g_2(\hat{n}_2 - \delta, N_2) = (g_1 g_2)_{\max} \exp\left[-2\delta^2 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)\right]} \quad (4.27)$$

... Gaußverteilung

rel. „Halbwertsbreite“:
$$\frac{\delta_h}{N_1 + N_2} = \frac{1}{N_1 + N_2} \sqrt{\frac{N_1 N_2}{2(N_1 + N_2)}} \quad (4.28)$$

• Beispiel: $N_1 = N_2 = 10^{22} \rightarrow a) \delta_n \approx 10^{11} \rightarrow \frac{\delta_n}{N_i} = 10^{-11}!$

b) $\delta \approx 10^{12} \rightarrow \frac{\delta}{N_i} = 10^{-10} \xrightarrow{(4.27)} \frac{g_1 g_2}{(g_1 g_2)_{\max}} = e^{-400} = 10^{-174}!!$



$\rightarrow$ **praktisch nicht realisiert!**
 [obwohl rel. Abweichung $\frac{\delta}{N_i}$ so klein ist!!]

also: Wahrscheinlichkeit $P_n(n_1) \sim g_1 g_2$: scharfer Peak bei $\hat{n}_1$

- etwas genauer:

(4.26) mit (4.11): $(g_1 g_2)_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{N_1 N_2}} 2^n e^{-2n^2/N} \quad (4.29)$

Entartungsfkt: $g(n, N) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\hat{n}_1 + \delta, N_1) g_2(\hat{n}_2 - \delta, N_2) d\delta = (g_1 g_2)_{\max} \sqrt{\frac{\pi N_1 N_2}{2 N_1 + N_2}} \quad (4.30)$

→ Wahrsch. max. Spinüberschuß $P_n(\hat{n}_1) = \frac{(g_1 g_2)_{\max}}{g(n, N)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \stackrel{N_1 = N_2 = \frac{N}{2}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.31)$

→ $P_n(\hat{n}_1)$ sehr klein, aber $\int_{\text{einige } \delta_n} P_n(\hat{n}_1 + \delta) d\delta \approx 1 \quad (4.32)$

- Erstaunlich!

(4.29), (4.30) $\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\frac{\ln(g_1 g_2)_{\max}}{\ln g(n, N)} \approx 1 - O\left(\frac{\ln N}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 \quad (4.33)$$

... „wahrscheinlichste Konfiguration dominiert“

4.4 Spinsysteme im thermischen Kontakt

Zusammenfassung:

(1) thermischer Kontakt = Austausch von Energie
in „großen“ Systemen:

- Gesamtsystem nimmt wahrscheinlichste Konfiguration an
Grund: Zustandszahl $g_1 g_2$ besitzt scharfes Maximum,
d.h. Fluktuationen um $(g_1 g_2)_{\max}$ sind minimal
- wohldefinierter Gleichgewichtszustand
- thermische Gleichgewichtswerte = Mittelwerte physikalischer
Größen sind vollkommen bestimmt durch wahrscheinlichste
Konfiguration

(2) kleine Systeme: große Fluktuationen um $(g_1 g_2)_{\max}$

(3) Thermodynamischer Limes: $N \rightarrow \infty$

→ exakt scharfe Größen: $\delta_h / N \rightarrow 0$

$$\rightarrow \frac{\ln(g_1 g_2)_{\max}}{\ln g(n, N)} \rightarrow 1$$

Zitat:

One should not imagine that two gases in a 0.1 liter container, initially unmixed, will mix, then again after a few days separate, then mix again, and so forth. On the contrary, one finds ... that not until a time enormously long compared to $10^{10^{10}}$ years will there be any noticeable unmixing of the gases. One may recognize that this is practically equivalent to never

L. Boltzmann