Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

# Blatt 7

Abgabe **Do., 16.06.2016, 14:15 Uhr,** vor der Vorlesung
*Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!*

**Aufgabe 18.** *Paarkorrelationsfunktion und Strukturfaktor* **(11 Punkte)**

Die Paarkorrelationsfunktion $g(\boldsymbol{r})$ eines Fluids,

$$\varrho g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{i \neq j} \delta(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \right\rangle$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, irgendein Teilchen mit Abstandsvektor $\boldsymbol{r}$ von einem beliebig ausgewählten Referenzteilchen $j$ zu finden ($\varrho$ ist die mittlere Dichte). Für ein Fluid aus kugelförmigen (Modell-) Teilchen hängt die Paarkorrelationsfunktion nur vom Betrag des Vektors $\boldsymbol{r}$ ab, $g(\boldsymbol{r}) = g(r)$. Die Fouriertransformierte von $g(r) - 1$ führt auf den statischen Strukturfaktor $S(k)$,

$$S(k) = 1 + \varrho \int_V \mathrm{d}^3 r \, (g(r) - 1) \, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

a) Bestimmen Sie für ein Gas geringer Dichte aus harten Kugeln, d.h., mit dem Paarpotential

$$\Phi(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

den statischen Strukturfaktor für $k \neq 0$. Verwenden Sie dabei die Näherung $g(r) \approx \exp(-\beta\Phi(r))$ für verdünnte Gase.

**Hinweis:** Kugelkoordinaten vereinfachen die Rechnung.

b) Berechnen Sie aus $S(k \to 0)$ die isotherme Kompressibilität $\kappa_T$.

**Hinweis:** Ggf. de l'Hospital'sche Regel mehrmals anwenden.

c) Leiten Sie aus $\kappa_T$ die thermische Zustandsgleichung $p(\varrho, T)$ ab. Entwickeln Sie den Druck in der Dichte bis zur zweiten Ordnung, um $p$ in der Form $p = k_{\mathrm{B}} T \varrho \left[1 + B(T)\varrho + \mathcal{O}(\varrho^2)\right]$ darzustellen. Wie hängt der zweite Virialkoeffizient $B$ für dieses Paarpotential von $T$ und vom Eigenvolumen der harten Kugeln ab?

**Aufgabe 19.** *Heisenberg-Modell, Goldstone-Moden* **(9 Punkte)**

Betrachten Sie das Heisenberg-Modell für $N$ Vektorspins in einem äußeren Feld,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j - \sum_i \boldsymbol{h}_i \cdot \boldsymbol{s}_i$$

a) Leiten Sie die in der Vorlesung angegebene Selbstkonsistenzgleichung für die Magnetisierung $\boldsymbol{m}_i = \langle \boldsymbol{s}_i \rangle$ mit Hilfe einer Sattelpunktsmethode (vgl. Methoden für Ising-Modell) her.

*Bitte wenden!*

b) In der Vorlesung wurde für den Fall $\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{h}$ eine Matrixdarstellung für die Fouriertransformierten der Suszeptibilitäten eingeführt,

$$\chi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q}) = \sum_{\gamma} (1 - F(\boldsymbol{q}))^{-1}_{\alpha\gamma} E_{\gamma\beta}$$

und gezeigt, dass im feldfreien Fall für $T < T_c$ aufgrund der Divergenz der transversalen Suszeptibilität bei $q = |\boldsymbol{q}| \to 0$ transversale Fluktuationen ungedämpft anwachsen können.

Vollziehen Sie für den feldfreien Fall ($h \to 0$), für $\boldsymbol{m} = m\boldsymbol{e}_z$ und $T < T_c$ die Berechnung der *longitudinalen* Suszeptibilität $\chi_{zz}(\boldsymbol{q})$ nach, und zeigen Sie, dass $\chi_{zz}$ für $T \nearrow T_c$ (und kleine $q$) das übliche Ornstein-Zernike-Verhalten zeigt.

- **Vorlesung**: Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium**: Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb**: 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**


  * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
  * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
  * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
  * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
  * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
  * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
  * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
  * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)