Prof. Dr. Sabine H. L. Klapp
Dr. Alice von der Heydt
Inst. für Theoret. Physik, TU Berlin

Blatt 9

Abgabe **Do., 30.06.2016, 14:15 Uhr,** vor der Vorlesung
Lösungen bitte großzügig kommentiert und mit Namen abgeben!

Aufgabe 22. *Ginzburg-Landau-Beschreibung einer Domänengrenze* **(8 Punkte)**

Betrachten Sie das Ginzburg-Landau-Funktional

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})] = \int_{L^d} \mathrm{d}^3 r \left\{ a\,\boldsymbol{m}^2(\boldsymbol{r}) + \frac{b}{2}\big(\boldsymbol{m}^2(\boldsymbol{r})\big)^2 + c\big(\nabla \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})\big)^2 - \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \right\}$$

mit $a = a_0(T - T_c)$ (vgl. Vorlesung).

a) Leiten Sie die Bestimmungsgleichung (Ginzburg-Landau-Gleichung) für die stationäre Lösung $\boldsymbol{m}_s(\boldsymbol{r})$ ab, die das Ginzburg-Landau-Funktional minimiert.

b) Nehmen Sie an, dass das Feld $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{e}_x$ homogen ist, um die Bestimmungsgleichung für die homogene stationäre Lösung $\overline{\boldsymbol{m}}_s(h)$ zu erhalten. Berechnen Sie daraus die asymptotischen Lösungen $\overline{\boldsymbol{m}}_s = \pm m_0 \boldsymbol{e}_x$ für $T < T_c$ im feldfreien Fall ($h \to 0$).

c) Betrachten Sie nun die inhomogene Lösung an der Grenze zweier Domänen: Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{m}_s = m(x)\boldsymbol{e}_x$ mit

$$m(x) = m_0 \tanh\left(\frac{x - x_0}{2\xi}\right)$$

($\xi \sim (T_c - T)^{1/2}$ die Korrelationslänge) die Ginzburg-Landau-Gleichung löst.

d) Bestimmen Sie die Freie Energie der Domänengrenze in dieser Beschreibung.

Aufgabe 23. *Trikritischer Phasenübergangspunkt* **(5 Punkte)**

Ein trikritischer Punkt wird durch folgendes Ginzburg-Landau-Funktional beschrieben

$$\mathcal{F}[\phi] = \int_{L^d} \mathrm{d}^3 r \left\{ a\,\phi^2 + v\phi^6 + c\big(\nabla\phi\big)^2 - h\phi \right\}$$

mit $a = a_0(T - T_c)$ und $v \geq 0$. Bestimmen Sie die homogene stationäre Lösung $\overline{\phi}_s$ für $h = 0$ und den kritischen Exponenten β für das Auftreten eines nichtverschwindenden Ordnungsparameters $\overline{\phi}_s \sim |T_c - T|^\beta$.

Aufgabe 24. *Molekulares Reißverschluss-Modell für DNA* **(7 Punkte)**

Untersuchen Sie ein vereinfachtes Modell für den 'helix-coil'-Phasenübergang in Polypeptiden oder DNA: Eine lineare Doppelkette aus N zweiteiligen Segmenten soll von einer Seite her geöffnet werden können, mit folgenden Energiebarrieren: Sind die Segmente $1, 2, \ldots, p$ bereits geöffnet, ist zum Öffnen des $(p+1)$ten Segments die Energie ϵ nötig. Ist das $p$te Segment geschlossen, so ist die Energie zum Öffnen des $(p+1)$ten Segments unendlich. Jedes offene Segment kann g entartete Zustände annehmen (z.B. g energetisch gleichwertige Orientierungen einer offenen Wasserstoffbrücke).

a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme des Moleküls gegeben ist durch

$$\mathcal{Z} = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \text{ mit } x := g\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}.$$

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie die mittlere Anzahl $\langle S \rangle$ der offenen Segmente für $N \gg 1$. Diskutieren Sie das Verhalten von $\langle S \rangle$ in der Nähe von $x_c = 1$ bzw. der zugehörigen kritischen Temperatur T_c. Welchen Wert nimmt $\langle S \rangle$ bei x_c an, und welche Steigung hat $\langle S \rangle(x)$ dort? Wie verhält sich $\langle S \rangle$ für $x \gg 1$ und für $x \ll 1$?

c) Wie sieht die Zustandssumme aus, wenn der molekulare Reißverschluss von beiden Seiten her geöffnet werden kann?

- **Vorlesung**: Di 10–12 Uhr, Do 14:15–16 Uhr, in **EW 202**
- **Übung/Tutorium**: Di 16–18 Uhr, in **EW 229**
- **Kriterien für den Scheinerwerb**: 50% der Punkte für die schriftlichen Übungsaufgaben (Abgabe in Zweier- bis Dreiergruppen) und regelmäßige, aktive Teilnahme am Tutorium
- **Literatur:**

  * F. Schwabl, *Statistische Mechanik* (Springer, Berlin, 2006)
  * M. Plischke, B. Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics* (3rd ed., World Scientific, 2006)
  * K. Huang, *Thermodynamics and Statistical Mechanics* (2nd ed., Wiley, 1987)
  * P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
  * N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Westview Press, 1992)
  * H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971, 1987)
  * L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000)
  * J. W. Negele, H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Westview Press, 1988, 1998)