Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 12.06.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 18 (4 Punkte): *Eigenwerte und Eigenvektoren* **(1+1+2=4 Punkte)**

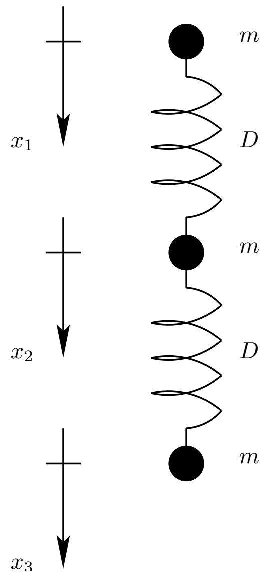
a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(i)} \quad A = A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{(ii)} \quad A = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte.

c) Geben Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten an, also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_j I)\, x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 19 (8 Punkte): *Gekoppelte Massen* **(2+3+3=8 Punkte)**
Betrachten Sie das abgebildete System aus drei gleichen Massen m, die sich nur auf einer vorgegebenen Geraden bewegen können und mit zwei gleichen Federn der Federkonstante D aneinander gekoppelt sind.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf für die Auslenkungen aus der Ruhelage $\underline{x} := (x_1, x_2, x_3)$ und formuliere sie diese als $\underline{\ddot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}(t)$.

b) Zeigen Sie, dass für die Frequenzen der Eigenschwingungen gilt $\omega^2 \in \{0, \frac{D}{m}, \frac{3D}{m}\}$.

c) Wenn das System eine Schwingung mit einer Eigenfrequenz ω durchführt, können wir schreiben $\underline{x}(t) = \underline{c}\ e^{i\omega t}$ mit $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Bestimmen Sie $\underline{c}$ für alle drei Eigenfrequenzen und beschreiben Sie in wenigen Worten, wie sich das System jeweils bewegt.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 20 (8 Punkte): *Eigenschaften der Funktionen* $\sin$ *und* $\cos$ **(1.5+2+2+2.5=8 Punkte)**

a) Zeichnen Sie die Funktionen $\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ und $\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ auf dem Intervall $[-L, L]$ und zeichnen Sie den Mittelwert ein.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{-L}^{L} e^{i\frac{(m-n)\pi}{L}x}dx$ mit $0 < L \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$.

c) Berechnen Sie die Integrale $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$.

d) Berechnen Sie die Integrale $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ und $\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$ mit $m, n > 0$. Wie hängen sie mit den Mittelwerten aus Aufgabenteil a) zusammen?

Tipp: Aufgabenteil b) und die Eulerformel helfen bei c) und d).

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes. Sollte der Termin auf einen Feiertag fallen, dann verschiebt sich die Abgabe auf den nächsten Arbeitstag.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060