Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Arash Azhand, Andreas Koher, Ché Netzer, Lasse Ermoneit, Philipp Stammer, Philip Knospe

9. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mo. 26.06.2017 bis 11:00 Uhr, Briefkasten im ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 25 (8 Punkte): *Fourier-Transformationen* **((2+1+2+1)+1+1=8 Punkte)**

Die Fourier-Transformation sei definiert durch

$$\tilde{f} = g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \tilde{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk \quad .$$

a) Fouriertransformieren Sie:

1) $f(x) = \frac{1}{2a} e^{-a|x|}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ Verwenden Sie: $\int_{-\infty+\imath y}^{\infty+\imath y} e^{-z^2} \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \mathrm{d}z$ für $y \in \mathbb{R}$, beweisbar über Funktionentheorie.

4) $f(x) = g(x - x_o)$. Hinweis: Drücken Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}(x)$ mit Hilfe von $\tilde{g}(k)$ aus, interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) die Relation: $\pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \mathrm{d}k$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Fourierdarstellung der $\delta-$Distribution den Satz von Plancherel (Analogon zur Parsevalschen Gleichung): $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \mathrm{d}k$

Aufgabe 26 (6 Punkte): $\delta-$*Distribution* **(1.5+1.5+1+1+1=6 Punkte)**

Die $\delta-$Distribution, manchmal auch salopp $\delta-$Funktion genannt, ist ein lineares Funktional auf dem Funktionenraum. Man kann sie durch ihre Wirkung auf Funktionen f definieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0)$$

Die Funktionen f müssen stetig sein und für $|x| \to \infty$ hinreichend schnell abfallen. Die $\delta-$Distribution ist keine Funktion. Eine Funktion, die diese Eigenschaft erfüllen würde, müßte überall außer bei $x = 0$ Null sein und bei $x = 0$ "irgendwie" unendlich sein. Tatsächlich kann die $\delta-$Distribution durch verschiedene Funktionenscharen g_ϵ ($\epsilon \to 0$) angenähert werden. Dabei zeigt man dann, dass eine solche Funktionenschar im Grenzwert "unter dem Integral" gegen die $\delta-$Distribution konvergiert für jede Testfunktion $f(x)$, die beliebig oft differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalls Null ist.

a) Zeigen Sie, dass $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ gegen die $\delta-$Distribution konvergiert.

b) Zeigen Sie unter zur Hilfenahme der Darstellung der $\delta-$Distribution durch eine Funktionenschar g_ε, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) \mathrm{d}x = -f'(0)$.

c) Zeigen Sie, wie in b), dass $\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x)$.

d) Berechnen Sie, wie in b), $\delta(x - x_0)$.

e) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\delta(x - x_0)$.

Bitte Rückseite beachten! $\longrightarrow$

Aufgabe 27 (6 Punkte): *1D-Wellengleichung* **(3+3=6 Punkte)**
Die eindimensionale Wellengleichung lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}E(x,t), \tag{1}$$

wobei $x \in (-\infty, \infty)$.

a) Transformieren Sie Gl.1 in den Impulsraum und finden Sie die Lösung für die allgemeine Anfangsbedingungen $E(x,0)$ und $\partial_t E(x,0)$.

b) Verwenden Sie die Variablen $\xi = x - ct$ und $\eta = x + ct$ um Gl.1 in die neue Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} E = 0 \tag{2}$$

zu transformieren. Zeigen Sie, dass $E(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ eine Lösung ist. Lösen Sie außerdem Gl.2 für die im vorherigen Aufgabenteil gegebenen Anfangsbedingungen.

Bonusaufgabe 28 (8 Zusatzpunkte): *Koordinatensysteme* **(2+4+2=8 Punkte)**

a) Stellen Sie folgende Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ in Zylinder- und in Kugelkoordinaten dar. Gibt es für die verschiedenen Felder besonders geeignete Koordinaten?

$$\text{(i)} \quad \phi_1(x,y,z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{(ii)} \quad \phi_2(x,y,z) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2})$$

b) Berechnen Sie für beide Koordinatensysteme (Zylinder- und Kugelkoordinaten) die Tangenten-Einheitsvektoren (das begleitende Dreibein $\underline{e}_{u_i}$) sowie die metrischen Koeffizienten.

c) Gegeben sei die Bahnkurve $\underline{r} = \begin{pmatrix} s - \sin(s) \\ -1 + \cos(s) \end{pmatrix}$ mit $s \in [0, \pi]$. Bestimmen Sie $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$ und den Tangenteneinheitsvektor.

Vorlesung:	• Donnerstag 8:15 Uhr – 09:45 Uhr im EW 201
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte, einmal vorrechnen, Klausur bestehen.
Zettel:	• Ausgabe: Donnerstags in der Vorlesung. • Abgabe: 10 Tage später am Montag im Briefkasten ('Einführung') des ER-Gebäudes. Sollte der Termin auf einen Feiertag fallen, dann verschiebt sich die Abgabe auf den nächsten Arbeitstag.
Sprechzeiten:	• Prof. Dr. Sabine Klapp: Di, 12.15 – 13 Uhr im EW 707 • Dr. Arash Azhand: Fr, 14 – 15 Uhr im EW 627 • Andreas Koher: Di 16 – 17 Uhr im ER 240 • Lasse Ermoneit: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Ché Netzer: Mo 14 – 15 Uhr im EW 060 • Philipp Stammer: Mi 16 – 17 Uhr EW 060 • Philip Knospe: Mi 14 – 15 Uhr EW 060