Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

10. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Montag 03.07.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Auf diesem Blatt können maximal 25 Punkte erzielt werden. Fünf davon sind Bonuspunkte.

Aufgabe 24 (8 Punkte): *Rabioszillationen*
In der Vorlesung wurde das Zwei-Niveau-System mit Ankopplung von Elektronen an ein elektromagnetisches Feld eingeführt, das durch den folgenden Hamiltonoperator dargestellt werden kann:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & -i\boldsymbol{\mu}\cdot\tilde{\mathbf{E}}\cos(\omega t) \\ i\boldsymbol{\mu}\cdot\tilde{\mathbf{E}}\cos(\omega t) & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Zustände durch

$$|\Psi\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle$$

beschrieben, wobei $|c_i|^2$ jeweils die Besetzungswahrscheinlichkeiten des Grundzustandes bzw. des angeregten Zustandes sind.

(a) Verifizieren Sie, dass für die resonante Anregung ($\omega = \omega_0$) die Koeffizienten

$$\tilde{c}_0(t) = \cos\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right) \qquad \text{und} \qquad \tilde{c}_1(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\theta(t)\right)$$

Lösungen der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{c}_0(t) = -\frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\tilde{\mathbf{E}}(t)}{2\hbar}\tilde{c}_1(t) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{c}_1(t) = \frac{\boldsymbol{\mu}\cdot\tilde{\mathbf{E}}(t)}{2\hbar}\tilde{c}_0(t)$$

sind. Dabei seien $\tilde{c}_k = c_k \exp(\mp i\frac{\omega_0}{2}t)$ und

$$\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\Omega}(t')\,\mathrm{d}t' \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\Omega}(t) := \left|\frac{\mu\cdot\tilde{\mathbf{E}}(t)}{\hbar}\right|$$

die sogenannte Pulsfläche.

(b) Diskutieren Sie die Lösung ausführlich. In welchem Zustand befindet sich das System, wenn die Pulsfläche θ gerade die Werte $\frac{\pi}{2}, \pi$ und 2π annimmt?

(c) Bestimmen Sie für einen Puls der Form

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{cases} \frac{A\pi}{2\tau}\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) & \text{für} -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die analytische Lösung. Plotten Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten $|\tilde{c}_0|^2$ und $|\tilde{c}_1|^2$ im Bereich von $t = [-2.5\,\mathrm{ps}, 2.5\,\mathrm{ps}]$ für $\tau = 5\,\mathrm{ps}$ und $A = 3\pi$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 25 (9 Punkte): *Bewegungsgleichungen im Heisenbergbild*
Im Schrödinger-Bild sei ein Einteilchen-Hamiltonoperator in einer Dimension gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für die fundamentalen Vertauschungsrelationen im Heisenberg-Bild $[\hat{x}_H, \hat{p}_H] = i\hbar$ und $[\hat{x}_H, \hat{x}_H] = [\hat{p}_H, \hat{p}_H] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator im Heisenbergbild durch

$$\hat{H}_H(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}_H^2 + V(\hat{x}_H)$$

gegeben ist. Tipp: Stellen Sie als Zwischenschritt $V(x)$ als Taylor-Reihe dar.

(c) Zeigen Sie, dass Orts- und Impulsoperator eines Teilchen im Heisenberg-Bild den "klassischen" Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_H = \frac{1}{m}\hat{p}_H \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\hat{p}_H = -\frac{dV}{d\hat{x}_H}(\hat{x}_H)$$

genügen.

(d) Betrachten Sie im Folgenden den harmonischen Oszillator mit dem Potential $V(\hat{x}) = \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ und geben Sie die Differentialgleichung für $\hat{x}_H$ an. Lösen Sie diese. Für $t = 0$ gelte: $\hat{x}_H = \hat{x}$ und $\hat{p}_H = \hat{p}$.

Aufgabe 26 (8 Punkte): *Gestörter harmonischer Oszillator*
Betrachten Sie den linearen anharmonischen Oszillator, dessen Hamiltonoperator durch $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ mit

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad \text{und} \quad \hat{H}_1 = \varepsilon c\hat{x}^4$$

und $|\varepsilon| \ll 1$ gegeben sei.

(a) Drücken Sie den Hamiltonoperator durch die Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus.

(b) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung $E_n^{(1)}$ und geben Sie explizit $E_0^{(1)}$ an.

(c) Berechnen Sie nun auch die zweite Energiekorrektur zur Grundzustandsenergie.
Hinweis: Die Summation erfolgt über alle ungestörten Eigenfunktionen von $\hat{H}_0$. Begründen Sie zunächst, warum die meisten Summanden keinen Beitrag zum Ergebnis leisten.

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite unter `www.tu-berlin.de/?qm17`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.