Prof. Dr. Harald Engel
Benjamin Lingnau, Jan Totz, Maria Zeitz, Manuel Katzer, Willy Knorr

4. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bis Mo. 22.05.2017 12:00 im Briefkasten am Hintereingang des ER-Gebäudes

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden sehr ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Deckblatt von der Homepage verwenden! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 7 (6 Punkte): *Quantenmechanische Erwartungswerte*

Der Erwartungswert des Ortes in einem durch Ψ beschriebenen Zustand ist

$$\langle x\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x,t)|^2 dx$$

wobei $|\Psi(x,t)|^2$ die normierte Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte ist.

(a) Berechnen Sie damit den Erwartungswert des Ortes $\langle x\rangle$ sowie $\langle x^2\rangle$ für die Grundzustandswellenfunktion $\Psi_1(x,t)$ des harmonischen Oszillators aus Aufgabe 6.

$$\Psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die mittlere quadratische Ableitung des Impulses für die selbe Wellenfunktion wie in (a).

(c) Zeigen Sie, dass das Produkt der mittleren quadratischen Abweichungen im Grundzustand des harmonischen Oszillators durch

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

gegeben ist. Dabei ist die mittlere quadratische Abweichung einer Größe X gegeben durch $\Delta X = \sqrt{\langle(X - \langle X\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2}$.

(d) **Bonus:** Wie ändert sich $\Delta x\Delta p$ für einen angeregten Zustand Ψ_n?

Aufgabe 8 (14 Punkte): *Dirac'sche Delta-Distribution*

Die Delta-Distribution $\delta(x)$ ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ eine reelle bzw. komplexe Zahl zu und lässt sich als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{1}$$

schreiben. Anschaulich kann man sich einen sog. "Delta-Peak" vorstellen:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty\,, & x = x_0, \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Betrachten Sie folgenden Darstellungen der Delta-Distribution:

(a) Die Darstellung über Gauß-Funktionen: $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)$.

(b) Die Darstellung über Lorentzkurven: $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$.

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x)$ die Bedingungen (2) und (1) erfüllt.
Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Dirac'schen Delta-Distribution

$$f(x) = \delta(x - x').$$

(d) Zeigen Sie mithilfe der inversen Fourier-Transformierten dass

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(x - x')\right).$$

eine weitere Darstellung der Delta-Distribution ist.

(e) Zeigen Sie anhand der Darstellung über Gauß-Funktionen in (a) folgende Eigenschaften:

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) = 1$$

(ii)

$$\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$$

Vorlesung:	• Dienstag 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202. • Mittwoch 8:30 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202.
Webseite:	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der TU Webseite unter `www.tu-berlin.de/?qm17`
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur.

Bemerkung: Bei den Übungsaufgaben werden nur Originalabgaben akzeptiert. Keine Kopien oder elektronischen Abgaben. Bei Programmieraufgaben ist verwendeter Code ausgedruckt mit abzugeben.