Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Johannes Blaschke (Sprechstunde: Fr 10:00-11:00 in EW 708)

7. Übungsblatt – Statistische Physik des Nichtgleichgewichts

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 19.06.2017 im Tutorium (10:15, EW 731)

S Aufgabe 21 (10 Punkte): *Strömung um einen Kreis*

Die komplexe Funktion

$$f(z) = z + \frac{1}{z} ,$$

mit $z = x+iy = re^{i\varphi}$, bildet den oberen Außenraum des Einheitskreises $G = \{re^{i\varphi}|r \geq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ bijektiv in die obere Halbebene $H = \{x + iy|y \geq 0\}$ ab.

(a) Zeigen Sie, dass der Rand von G auf den Rand von H abgebildet wird und dass Halbkreise mit $r > 1$ auf halbe Ellipsen abgebildet werden.

Eine komplexe Funktion $g(z) = u(z)+iv(z)$ nennt man analytische Funktion wenn sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(z)$ analytisch ist.

Lösungen der Laplace-Gleichung $\triangle h(x, y) = 0$, nennt man harmonische Funktionen. Laut Aufgabe 13 (b) ist damit die Strömungsfunktion einer wirbelfreien und inkompressiblen Strömung in zwei Dimensionen eine harmonische Funktion. Eine Lösung der Laplace-Gleichung auf H, die auf dem Rand von H verschwindet ist die Funktion $\Psi(x, y) = y$. Verwenden Sie folgenden Satz um daraus eine Lösung der Laplace-Gleichung auf G zu bestimmen, die auf dem Rand von G verschwindet.

Harmonische Funktionen von analytischen Funktionen sind harmonisch.

$\Psi(f(z))$ ist also eine Strömungsfunktion einer wirbelfreien und inkompressiblen Strömung auf G, die auf dem Rand von G verschwindet.

(c) Bestimmen Sie $\Psi(f(z))$ und skizzieren Sie die Niveaulinien von $\Psi(f(z))$. Zeigen Sie, dass die Niveaulinien gerade die Stromlinien der Strömung sind.

(d) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld aus der Strömungsfunktion und vergleichen Sie das Resultat mit dem Feld um eine Kugel (mit $R = 1$ und $U = 1$) aus Aufgabe 20 (c).

M Aufgabe 22: *Reibungstensor eines Zylinders*

Zwischen der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ eines Köpers, der sich durch eine Flüssigkeit bewegt, und der hierzu benötigten Kraft $\mathbf{f}$ besteht der Zusammenhang $\mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{v}$. Der Reibungstensor $\boldsymbol{\gamma}$ ist hierbei stets symmetrisch:

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \boldsymbol{\gamma} .$$

Wir betrachten nun einen zylindersymmetrischen Körper, dessen Symmetrieachse $\mathbf{n}$ in Richtung der z-Achse weise. Sei $\mathbf{R}$ eine Symmetrieoperation (Drehung, Spiegelung), die den Körper in sich selbst überführt. Es gilt dann

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{R}^T .$$

(a) Betrachten Sie das Transformationsverhalten von $\boldsymbol{\gamma}$ unter einer $90°$-Drehung um die z-Achse. Welche Form folgt daraus für den Tensor $\boldsymbol{\gamma}$?

(b) Formulieren Sie das Ergebnis unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem, nur in Abhängigkeit von der Achse $\mathbf{n}$. Zeigen Sie, dass sich $\boldsymbol{\gamma}$ in der Form

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{||}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \gamma_{\perp}(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) ,$$

schreiben lässt. Welche Bedeutung haben die Matrizen $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ und $\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ bzw. die Reibungskonstanten $\gamma_{||}$ und $\gamma_{\perp}$?

Zum Übungsbetrieb:
Die Übungsaufgaben teilen sich auf in mündliche M und schriftliche S Aufgaben. Die Bedingung für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich daher in zwei Teile:

- Es müssen mindestens 50% der schriftlichen Übungspunkte erreicht werden. Die Abgabe erfolgt in Zweiergruppen.
- Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung diejenigen Aufgaben auf einer ausliegenden Liste an, die er oder sie bearbeitet hat. Wer eine Aufgabe angekreuzt hat, ist bereit diese Aufgabe an der Tafel vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen am Ende des Semesters in Summe 50% der mündlichen Aufgaben angekreuzt sein.