

PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

11. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht II

Abgabe: Mi. 19.07.2017 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (20 Punkte): Quantum to classical mapping of Ising model

The partition function

$$(1) \quad Z = \text{tr} \left(e^{-\beta H} \right)$$

of the 1-D quantum Ising model

$$(2) \quad H = H_0 + H_1 = -h \sum_{i=1}^N \sigma_i^x - J \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z,$$

can be mapped to that of the 2-D classical Ising model

$$(3) \quad H_{cl} = -J_x \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} S_{i,j} S_{i+1,j} - J_y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} S_{i,j} S_{i,j+1}.$$

1. (5) Use the Suzuki-Trotter approximation

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{x(H_0+H_1)} = e^{xH_0} e^{xH_1},$$

to decompose $e^{-\beta H}$ into a product of alternating exponentials.

2. (5) Analyze the structure of the 2x2 matrix $e^{x\sigma_x}$

$$(5) \quad \cosh(x) + \sigma_x \sinh(x)$$

Use a product of eigenvalues of σ_z to express the elements in the matrix in the form

$$(6) \quad \langle S'_z | e^{x\sigma_x} | S_z \rangle = \Lambda e^{\gamma S'_z S_z},$$

and identify Λ and γ .

3. (10) Use the previous results and a decomposition of unity in the basis of σ_z to reconstruct the classical partition function

$$(7) \quad Z_{cl} = \sum_{\{S_{i,l}=\pm 1\}} e^{\beta_{cl} J_x \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} S_{i,j} S_{i+1,j} + \beta_{cl} J_y \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} S_{i,j} S_{i,j+1}},$$

and identify the values N_x , N_y , $\beta_{cl} J_x$ and $\beta_{cl} J_y$.