

PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

4. Übungsblatt – TPVI: Quantensysteme im Nichtgleichgewicht II

Abgabe: Mi. 24.05.2017 12:15 Uhr im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 6 (20 Punkte): Jordan-Wigner-Transformation

Das 1-D Quantum-Ising-Modell

$$(1) \quad H = -g \sum_{i=1}^N \sigma_i^x - J \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z$$

kann analytisch mittels der Jordan-Wigner-Transformation gelöst werden

$$(2) \quad \sigma_n^x = 1 - 2c_n^\dagger c_n$$

$$(3) \quad \sigma_n^z = - \left(c_n^\dagger + c_n \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 - 2c_m^\dagger c_m \right),$$

wobei c_n fermionische Operatoren sind, die die Antivertauschungsrelationen erfüllen

$$(4) \quad \left\{ c_m, c_n^\dagger \right\} = \delta_{nm}, \quad \left\{ c_m, c_n \right\} = 0$$

1. (5) Prüfen Sie, dass die Spin Vertauschungsrelationen durch die Transformation behalten sind.
2. (5) Schreiben Sie den Jordan-Wigner-transformierten Hamilton-Operator (bis auf dem Rand-Term $-J\sigma_N^z\sigma_{N+1}^z$) um. (Hint: $c_n^2 = 0$)
3. (5) Für periodische Randbedingungen $\sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z$, benutzen Sie die Projektoren

$$(5) \quad \mathcal{P}^\pm = \frac{1}{2} \left[1 \pm \prod_{m=1}^N \left(1 - 2c_m^\dagger c_m \right) \right]$$

um den Hamilton-Operator in Terme unterschiedlicher Parität zu zerlegen. (Hint: Beachten Sie die unterschiedlichen Randbedingungen in jedem Term)

4. (5) Führen Sie eine Fourier-Transformation ein

$$(6) \quad c_n = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{N}} \sum_k \tilde{c}_k e^{+ikn\frac{2\pi}{N}}$$

um die eindimensionale Geometrie in paarweise Kopplungen umzuwandeln. Dafür müssen geeignete k -Werte je nach Parität benutzt werden.

Es bleibt nur noch eine Bogolubov-Transformation übrig um das Modell zu diagonalisieren.