Prof. Dr. Andreas Knorr
Dr. Marten Richter

10. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

Abgabe: Bis Mittwoch, den 12.7.2017 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

Aufgabe 1 (15 Punkte): *Erzeugung von verschränkten Photonen durch parametric downconversion*

Wir verwenden in dieser Aufgabe das Wechselwirkungsbild. Wir betrachten die Propagation in $z-$Richtung durch einen nichtlinearen optischen Kristall, der Länge L (Von $z = -L$ bis $z = 0$). Die Wechselwirkung mit der optischen Nichtlinearität (Parameter χ) wird durch den Hamiltonian:

$$H_I = \int_V \mathrm{d}V \frac{2}{3}\varepsilon_0 \chi E_i^{(-)} E_s^{(-)} E_p^{(+)} + h.c. \tag{1}$$

mit dem Kristallvolumen V beschrieben. Der eingestrahlte Pumppulse E_p wird klasssisch beschrieben mit dem Ansatz $E_p(z,t) = e^{-i\Omega_p t}\tilde{E}_p(z,t)$ der zentralen Pumpfrequenz Ω_p und der Einhüllenden $\tilde{E}_p(z,t) = \int \mathrm{d}\nu_p \overline{E}_p(\nu_p) e^{ik_p z - i\nu_p t}$. Sowohl das Idler- ($E_i$) und das Signalfeld ($E_s$) wird quantisiert beschrieben, so ergibt sich im Inneren des Kristalls ($r = s, i$):

$$E_r^{(+)}(z,t) = \sum_\omega \frac{\mathcal{E}_\omega}{n(\omega_r)} a_{r,k_r(\omega)} e^{i(k_r(\omega)z - \omega t)} \tag{2}$$

mit $k_r(\omega) = n_r(\omega)\omega/c$ und $\mathcal{E}_\omega = \sqrt{\hbar\omega/(2\varepsilon_0 V_Q)}$ (mit dem Quantisierungsvolumen V_Q).

1. Zeigen Sie, dass nach Propagation durch den Kristall in erster Ordnung zeitlicher Störungstheorie, die Zweiphotonwellenfunktion die Form

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \sum_{k_s,k_i} F(k_s,k_i) a^\dagger_{s,k_s} a^\dagger_{i,k_i} |0\rangle \tag{3}$$

$$F(k_s(\omega), k_i(\omega')) = g \int_{-L}^{0} \mathrm{d}z e^{i\Delta(k_s,k_i)z} E_p(\omega + \omega' - \Omega_p) \tag{4}$$

   annimmt mit $\Delta(k_s,k_i) = k_p - k_i - k_s$.

2. Wir betrachten im folgenden Typ II Prozesse, d.h. die Polarisationsrichtungen von Signal- und Idlerfeld und damit die der gemessenen Felder $E_1^{(+)}$, $E_2^{(+)}$ sind verschieden. Die Felder ausserhalb des Kristalls haben die Form ($r = 1, 2$)

$$E_r^{(+)}(t) = \sum_\omega \mathcal{E}_\omega a_{r,k_r(\omega)} e^{-i\omega t}. \tag{5}$$

   Begründen Sie, dass für den Erwartungswert $\langle\Psi|E_1^{(-)}(t_1)E_2^{(-)}(t_2)E_2^{(+)}(t_2)E_1^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle$ gilt: $\langle\Psi|E_1^{(-)}(t_1)E_2^{(-)}(t_2)E_2^{(+)}(t_2)E_1^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle = |\langle 0|E_2^{(+)}(t_2)E_1^{(+)}(t_1)|\Psi\rangle|^2$.

3. Wir zerlegen $\omega_r = \Omega_r + \nu_r$ mit $|\nu_i| \ll \Omega_i$. Der Kristall ist so geschnitten, dass gilt $\Omega_s + \Omega_i = \Omega_p$ und $K_s + K_i = K_p$, mit $K_r = n_r(\Omega_r) \cdot \Omega_r/c$. Zeigen Sie $k_r(\omega) \approx K_r + \nu_r \frac{1}{u_r(\Omega_r)}$ mit der Gruppengeschwindigkeit $u_r(\Omega_r)$.

4. Zeigen Sie für $\Delta(k_s,k_i) = -(\nu_p D_+ + \frac{1}{2}\nu_- D)$ mit $\nu_- = \nu_i - \nu_s$, $D = 1/u_i(\Omega_i) - 1/u_s(\Omega_s)$ und $D_+ = \frac{1}{2}(1/u_i(\Omega_i) + 1/u_s(\Omega_s)) - 1/u_p(\Omega_p)$.

5. Wir wollen nun Biphotonamplitude $A(t_+, t_{12}) = \langle 0|E_2^{(+)}(t_2)E_1^{(-)}(t_1)|\Psi\rangle$ mit $t_+ = (t_1 + t_2)/2$ und $t_{12} = t_1 - t_2$ berechnen. Zeigen Sie zunächst

$$\begin{aligned} A(t_+, t_{12}) &= v_1 e^{-\imath\Omega_p t_+} I && (6)\\ I &= \int_{-L}^{0} \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu_- \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\nu_p e^{-i\frac{1}{2}\nu_-(t_12+Dz)} e^{-\imath\nu_p(t_+ + D_+ z)} \overline{E}_p(\nu_p) && (7) \end{aligned}$$

Bemerkung: v_1 kann Phasen in Abhängigkeit von t_{12} enthalten.

6. Zeigen Sie schließlich: $A(t_+, t_{12}) = v(t_+)u(t_{12})w(t_+, t_{12})$ mit $v(t) = v_0 e^{-i\Omega_p t}$, $w(t, t') = \tilde{E}(0, t - t'\frac{D_+}{D})$ mit $u(t) = \Pi(t)$, wobei $\Pi(t) = 1/(DL)$ für $0 < t < DL$ und $\Pi(t) = 0$ sonst.

7. Plotten Sie die Biphotonverteilung $A(t_+, t_{12})$ über t_1 und t_2 für einen Gauß-Pumppulse der Breite 20 fs mit $DL = 40$ fs und $D_+ = 0$ als Dichteplot. Zeichnen Sie die t_{12} Achsen ein und kommentieren sie die Eigenschaften der Verteilungsfunktion ausführlich, insbesondere was die zeitliche Abfolge der Pulse betrifft. Vergleichen Sie das Ergebnis ferner mit zwei unkorrelierten Photonen.