

Prof. Dr. Andreas Knorr  
Dr. Marten Richter

#### 4. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Theoretische Optik

##### Abgabe: Bis Mittwoch, den 31.5.2017 in der Übung

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe erfolgt in Dreiergruppen.

##### Aufgabe 1 (10 Punkte): Zweiphotonenwellenfunktion

In dieser Aufgabe wird die Präparation eines Zweiphotonenzustandes durch Zerfall in einem Dreiniveausystem betrachtet. Gegeben seien die drei Zustände  $a$ ,  $b$  und  $c$  mit den Energien  $\hbar\omega_a$ ,  $\hbar\omega_b$  und  $\hbar\omega_c$ , wobei  $\omega_a > \omega_b > \omega_c$  gilt. Wir verwenden im folgenden das Wechselwirkungsbild. Als Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators werden die optischen Übergänge zwischen den Niveaus verwendet:

$$H_{int} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{a,\mathbf{k}}^* \sigma_+^{(1)} a_{\mathbf{k}} e^{i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} + h.c. + \hbar \sum_{\mathbf{q}} g_{b,\mathbf{q}}^* \sigma_+^{(2)} a_{\mathbf{q}} e^{i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} + h.c.. \quad (1)$$

Hierbei ist  $\sigma_+^{(1)} = |a\rangle\langle b|$  und  $\sigma_+^{(2)} = |b\rangle\langle c|$ . Dabei sind  $\hbar\nu_{\mathbf{k}}$ ,  $\hbar\nu_{\mathbf{q}}$  die Energien der emittierten Photonen mit Wellenvektor  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{q}$ . Zu Beginn befinde sich kein Photon im System und der elektronische Anteil sei im Zustand  $a$ . In diesem Fall ist der Ansatz:

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a, 0\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_{b,\mathbf{k}}(t)|b, 1_{\mathbf{k}}\rangle + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)|c, 1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{q}}\rangle \quad (2)$$

gerechtfertigt wobei die Koeffizienten zum Anfangszeitpunkt durch  $c_a(t=0) = 1$ ,  $c_{b,\mathbf{k}}(t=0) = 0$  und  $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t=0) = 0$  gegeben sind.

1. Leiten Sie Bewegungsgleichungen in der Zeit für die Koeffizienten  $c_a(t)$ ,  $c_{b,\mathbf{k}}(t)$  und  $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$  ab.
2. In der Übung wurde die Herleitung der Raten für die spontane Photonemission über die Wigner-Weisskopf Näherung eingeführt. Benutzen Sie das Ergebnis aus der Übung in dem Sie in der Gleichung für  $c_a(t)$  und  $c_{b,\mathbf{k}}(t)$ , die folgenden Ersetzungen durchführen:

$$\begin{aligned} -i \sum_{\mathbf{k}} g_{a,\mathbf{k}}^* c_{b,\mathbf{k}} e^{i(\omega_{ab} - \nu_{\mathbf{k}})t} &= -\frac{\Gamma_a}{2} c_a \\ -i \sum_{\mathbf{q}} g_{b,\mathbf{q}}^* c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}} e^{i(\omega_{bc} - \nu_{\mathbf{q}})t} &= -\frac{\Gamma_b}{2} c_{b,\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3)$$

3. Ziel ist es nun  $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$  zu bestimmen. Lösen Sie das Gleichungssystem und finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für  $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$  bei dem die anderen Koeffizienten durch Lösung der Gleichungen eliminiert wurden.
4. Berechnen Sie  $c_{c,\mathbf{k},\mathbf{q}}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ .
5. Zeigen Sie, dass die photonische Zweiphotonenwellenfunktion  $|\gamma, \phi\rangle$  für  $t \rightarrow \infty$ , die folgende Form annimmt:

$$|\gamma, \phi\rangle = - \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \frac{g_{a,\mathbf{k}} g_{b,\mathbf{q}}}{[i(\nu_{\mathbf{k}} + \nu_{\mathbf{q}} - \omega_{ac}) - \Gamma_a/2][i(\nu_{\mathbf{q}} - \omega_{bc}) - \Gamma_b/2]} |1_{\mathbf{k}}, 1_{\mathbf{q}}\rangle. \quad (4)$$

#### 4. Übung TPV SS17

- Vorlesung:**
- Donnerstag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.
  - Freitag 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203, Knorr.

- Übung:**
- Mittwoch 14:00-16:00 Uhr im EW 114, Richter.

**Anmeldung:** Die Punkteverteilung und Scheinvergabe zu der Vorlesung “Theoretische Physik VI: Theoretische Optik” erfolgt über das Moseskontosystem: <https://moseskonto.tu-berlin.de/moseskonto>.  
Für Nachmeldungen bitte den Assistenten ansprechen.

- Webseite:**
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter <http://www.itp.tu-berlin.de/?183210>

- Scheinkriterien:**
- Mindestens 60% der Übungspunkte.
  - Regelmäßige und aktive Teilnahme an der Übung.

**Bemerkung:** Bei den Übungsaufgaben werden nur dokumentenechte, handschriftliche Originale akzeptiert. Es werden keine Kopien oder elektronischen Abgaben akzeptiert.

#### Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Scully, Zubairy, Quantum optics (Cambridge)
- Loudon, The Quantum Theory of Light (Oxford)
- Allen, Eberly, Optical Resonances and two-level atoms (Dover)
- Mandel, Non-linear Optics (Wiley-VCh)
- Born, Wolf, Theoretische Optik (Cambridge)
- Fox, Quantum Optics (Oxford)
- Schubert, Wilhelmi, Nonlinear Optics and Quantum Electronics (Wiley)
- Römer, Theoretical Optics (Wiley)