

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
 Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

## 11. Übungsblatt – Biologische Physik

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 04.07.2018 in der Übung**

**M Aufgabe 33: Biegung**

Berechnen Sie die Biegeenergie eines elastischen dünnen Stabes der Länge  $\pi R/2$ , der zu einem Kreisbogen mit Radius  $R$  gebogen ist. Der Stab hat die Persistenzlänge  $A$  und damit die Biegesteifigkeit  $Ak_B T$ . Das Kreisstück sei folgendermaßen parametrisiert:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} R \cos(s/R) \\ R \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

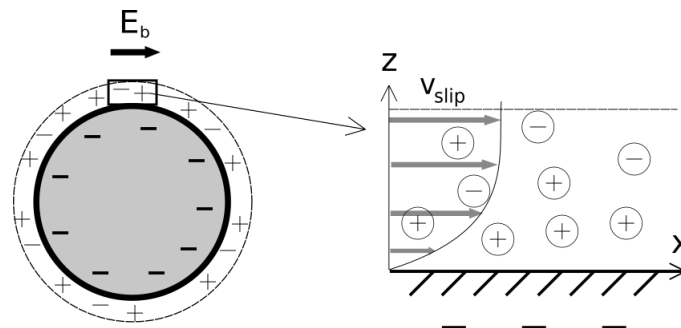
**M Aufgabe 34: Zufallsgeher auf kubischem Gitter**

Wie lautet die Fundamentallösung  $p(\mathbf{r}, t)$  der Diffusionsgleichung in 3D aus Aufgabe 12? Was erhält man für den mittleren quadratischen Abstand  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  des Teilchens vom Ursprung?

Betrachten Sie nun eine frei bewegliche Polymerkette, die aus  $N$  Segmenten der Länge  $L$  besteht. Stellen Sie eine Analogie zum Zufallsgeher her. Was erhalten Sie für den mittleren quadratischen End-zu-End-Abstand  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  der Polymerkette? Wie lautet im kontinuierlichen Fall ( $N \rightarrow \infty$ ) die Wahrscheinlichkeit  $p(r)$  für den End-zu-End-Abstand  $r$  des Polymers?

**S Aufgabe 35 (10 Punkte): Elektrophorese**

Ein kugelförmiges, schwach geladenes Teilchen befindet sich im Ruhezustand im Wasser (die Gra-



vation wird vernachlässigt). Im Wasser sind monovalente Ionen und Gegenionen gelöst, welche das elektrische Potential  $\phi$  des geladenen Teilchens abschirmen. Der Überschuss der lokalen Konzentration von Ionen/Gegenionen um die Kugel ist gegeben durch

$$(1) \quad n_{\pm} = n_0 \left[ \exp\left(-\frac{\pm e\phi}{k_B T}\right) - 1 \right],$$

wobei  $n_0$  die Konzentration der Ionen/Gegenionen weit weg von der Teilchenoberfläche ist. Die Poisson-Gleichung für das elektrische Potential  $\phi$  der Kugel lautet  $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon$ , wobei  $\rho = e(n_+ - n_-)$  die lokale Ladungsdichte der Ionen/Gegenionen ist.

- (a) Zeigen Sie, dass die Poisson-Gleichung für schwach geladene Teilchen ( $e\phi \ll k_B T$ ) die lineare Form

$$(2) \quad \nabla^2 \phi = \frac{\phi}{\lambda^2}$$

annimmt. Wie lautet der Ausdruck der Abschirmlänge  $\lambda$ ?

## 11. Übung BP SS18

Wir betrachten den Fall von kleinen Abschirmmlängen. In diesem Fall kann man sich die überschüssigen Ionen/Gegenionen als eine dünne Ladungsschicht über einer flachen Oberfläche vorstellen (siehe Zeichnung). Bestimmen Sie die Lösung von (2) mit dem Ansatz  $\phi(z) = A \exp(-\kappa z)$ . Wie schreiben sich die Konstanten  $A$  und  $\kappa$ . Dabei sei beachtet, dass das elektrische Feld  $-\nabla\phi$  des Teilchens an der Oberfläche gleich  $\sigma/\epsilon$  sein muss, wobei  $\sigma$  die Ladungsflächendichte des Teilchens ist. Was ergibt sich daraus für das ionische Ladungsdichtenprofil  $\rho(z)$ ?

- (b) Nun wird das gesamte System in ein konstantes elektrisches Feld  $\mathbf{E}_b = E_b \mathbf{e}_x$  gesetzt, was zur elektrophoretischen Bewegung des Teilchens führt. Im Ruhesystem des Teilchens induziert die Kraftdichte  $f_x(z) = \rho(z)E_b$  einen elektro-osmotischen Fluss entlang der Oberfläche (siehe Zeichnung), der durch die Stokes-Gleichung bestimmt wird:

$$(3) \quad \eta \frac{\partial^2 v_x(z)}{\partial z^2} + f_x(z) = 0.$$

Die Flussgeschwindigkeit  $v_x(z)$  ist null an der Teilchenoberfläche ( $z = 0$ ) und nimmt einen maximalen Wert  $v_{slip}$  direkt ausserhalb der Ladungsschicht ( $z \rightarrow \infty$ ) an. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsfeld  $v_x(z)$  und die sogenannte 'Slip'-Geschwindigkeit  $v_{slip}$ .

Die Ladung des Teilchens wird genau von dem Überschuss an Ionen/Gegenionen in der Schicht kompensiert. Des Weiteren schreibt sich das Stokessche Gesetz ausserhalb der Ladungsschicht als  $\mathbf{F} = 6\pi\eta R(U + v_{slip})$ , wobei  $R$  der Radius und  $U$  die elektrophoretische Geschwindigkeit des Teilchens sind. Erklären Sie kurz, warum sich das Teilchen deshalb mit einer Geschwindigkeit  $U = -v_{slip}$  in die entgegengesetzte Richtung des Flusses bewegen muss. Die elektrophoretische Mobilität  $\mu_E$  des Teilchens ist definiert durch  $U = \mu_E E_b$ . Wie lautet der Ausdruck von  $\mu_E$ . Wie beeinflusst die Ladung des Teilchens die Richtung seiner elektrophoretischen Bewegung?