Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

4. Übungsblatt – Biologische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mi. 16.05.2018 in der Übung

S Aufgabe 11 (10 Punkte): *Binomial- und Gauß-Verteilung*

Ein Zufallsgeher bewege sich mit Schritten der Länge a nach rechts oder links. Nach N Schritten befindet er sich an der Position $x_N = a\sum_{i=1}^{N} k_i$, wobei k_i die Werte 1 und -1 annehmen kann. Der Drift u des Gehers ist definiert als Durschnittswert von k_i, daher $u = \langle k_i \rangle$.

(a) Bestimmen Sie $\langle x_N \rangle$ und $\langle x_N^2 \rangle$. Vergleichen Sie dies mit dem Diffusionsgesetz $\langle x_N^2 \rangle = 2Dt$. Wie schreibt sich die Diffusionskonstante D?

Betrachten Sie nun einen Zufallsgeher ohne Drift ($u = 0$).

(b) Wie lautet die Wahrscheinlichkeit $p_N(k)$, dass der Zufallsgeher sich nach N Schritten in einer Entfernung $k \cdot a$ ($k \in \boldsymbol{Z}$) vom Startpunkt befindet?

(c) Leiten Sie aus der diskreten Verteilung $p_N(k)$ mit Hilfe der Stirling'schen Formel

$$\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2}\ln(2\pi N)$$

im Grenzfall $N \to \infty$, $a \to 0$ und $\Delta t \to 0$ die kontinuierliche Gauß-Verteilung $p(x,t)\mathrm{d}x$ her. Dabei seien $x = k\,a$, $t = N\Delta t$ und $D = a^2/2\Delta t$ fest.

M Aufgabe 12: *Zufallsgeher auf kubischem Gitter*

Betrachten Sie ein Teilchen, das in jedem Zeitschritt Δt einen Sprung der Länge a in zufälliger Richtung auf einem kubischen Gitter macht. Sei $p(\mathbf{r},t)$ die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t am Ort $\mathbf{r}$ auf dem Gitter zu finden. Leiten Sie eine Diffusionsgleichung für $p(\mathbf{r},t)$ her, in dem Sie in dem Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p(\mathbf{r}, t+\Delta t) - p(\mathbf{r},t)}{\Delta t}$$

$p(\mathbf{r}, t+\Delta t)$ als Funktion aller $p(\tilde{\mathbf{r}},t)$ mit $\tilde{\mathbf{r}} \neq \mathbf{r}$ darstellen und Taylor-entwickeln. Was ist die Diffusionskonstante D? Was erhält man auf einem 2D-Gitter, was auf einem 1D-Gitter?

S Aufgabe 13 (6 Punkte): *Diffusionsgleichung*

Gegeben sei die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r},t) = D\nabla^2 p(\mathbf{r},t),$$

mit der Diffusionskonstanten D.

(a) Lösen Sie die stationäre Diffusionsgleichung in 1D für die Randbedingungen $p(0,t) = 2$ und $p(1,t) = 1$.

(b) Lösen Sie die Diffusionsgleichung in 1D für die Anfangsbedingung $p(x_0, 0) = \delta(x_0)$ und die Randbedingungen $\lim\limits_{|x|\to\infty} p(x,t) = 0$. Was ergibt sich für $\langle x^2 \rangle$? Plotten Sie ferner $p(x,t)$ für $D \cdot t = 0.1, 1, 10, 100$.

M **Aufgabe 14**: *Dartspiel*

Nehmen Sie an, Sie wollen mit einem Pfeil den Mittelpunkt einer Dartscheibe treffen. Hierbei kommt es zu kleinen zufälligen Abweichungen in der x und y Richtung. Die Abweichungen sollen richtungsunabhängig und mit der Varianz $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$ gaußverteilt sein.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(r)$, dass Sie die Scheibe in einem Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ treffen.

Hinweis: Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte in Polarkoordinaten dar und integrieren Sie über den Winkel.

(b) Wie ist der Erwartungswert? Skizzieren Sie $p(r)$.

(c) Bestimmen Sie den Anteil an Pfeilen, die außerhalb eines Kreises mit dem Radius R_0 landen.

Alternativaufgabe Kurzvortrag (ersetzt Aufgaben 11-14)

Übersicht über die *Geschichte der Vererbungslehre*
(vgl. Vorlesungsmaterialien)