

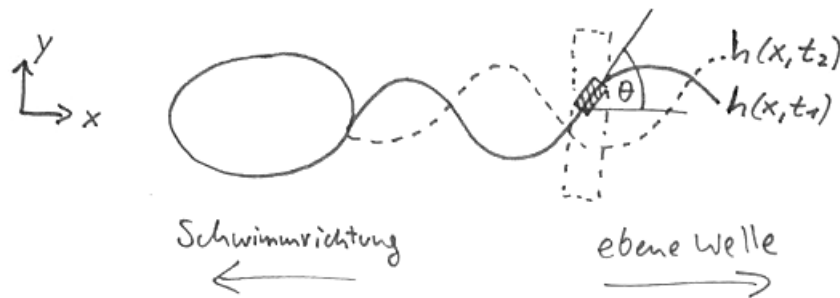
Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
 Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

**8. Übungsblatt – Biologische Physik**

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 13.06.2018 in der Übung**

**S Aufgabe 25 (8 Punkte):** *Geschwindigkeit eines Spermiums*

In dieser Aufgabe soll die Geschwindigkeit eines Spermiums abgeschätzt werden.



- (a) Das fadenförmige Filament der Länge  $L$  des Spermiums deformiere sich gemäß

$$h(x, t) = b \sin(kx - \omega t) .$$

Aufgrund dieser nach rechts laufenden, ebenen Welle schiebt das Spermium Flüssigkeit nach rechts und schwimmt nach links. Das Filament stellen wir uns vor als eine Ansammlung aneinander gereihter Stäbe, die nach oben und unten durch die Flüssigkeit gezogen werden, d.h.  $\mathbf{v} = v_y \mathbf{e}_y$  (siehe Skizze). Für die Antriebskraftdichte  $\mathbf{f}$  gilt für den Fall kleiner Reynoldszahlen  $\mathbf{f} = \gamma \mathbf{v}$ .

Zuerst muss die Antriebskraftdichte  $f_x$  parallel zur Schwimmrichtung berechnet werden. Bestimmen Sie dazu die Reibungsmatrix  $\gamma(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta) \gamma_0 \mathbf{R}(\theta)$  eines Stabes, der den Winkel  $\theta$  zur  $x$ -Achse hat.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \gamma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \gamma_{\perp} \end{pmatrix}$$

ist dabei die Reibungsmatrix eines Stabes, der parallel zur  $x$ -Achse ausgerichtet ist.

- (b) Nehmen Sie an, dass der Winkel  $\theta$  klein ist ( $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ). Wie schreibt sich nun die Reibungsmatrix  $\gamma(\theta)$ ? Drücken Sie ferner  $v_y$  und  $\theta$  als Ableitungen von  $h$  aus. Welche Relation ergibt sich daraus zwischen  $v_y$  und  $\theta$ ?
- (c) Berechnen Sie die Antriebskraft  $F_x = \int_0^L f_x dx$ .
- (d) Berechnen Sie die über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  gemittelte Antriebskraft  $\langle F_x \rangle = T^{-1} \int_0^T F_x dt$ .
- (e) Stellen Sie ein Kräftegleichgewicht aus der mittleren Antriebskraft und der Reibungskraft des Spermiums auf (approximieren Sie dazu das Spermium als Stab der Länge  $L$ ). Zeigen Sie, dass für die mittlere Geschwindigkeit des Spermiums gilt:

$$\langle u \rangle = -\frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{2\gamma_{\parallel}} \omega k b^2 .$$

8. Übung BP SS18

**M Aufgabe 26:** *Energiefluktuationen im abgeschlossenen System*

Zwei nach außen abgeschlossene Systeme seien im thermischen Kontakt miteinander. Es soll gezeigt werden, dass die relativen Fluktuationen der inneren Energie zwischen den beiden Systemen im thermodynamischen Limes (Teilchenzahl  $N \rightarrow \infty$ ) verschwinden:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{E} = 0.$$

Dabei seien die beiden Systeme physikalisch identisch und ihre Gesamtenergie ist  $E = E_1 + E_2$ . Es ist offensichtlich  $\langle E_1 \rangle = \langle E_2 \rangle = E/2$ .

- (a) Entwickeln Sie die Gesamtentropie  $S = S_1 + S_2$  nach  $\Delta E = E_1 - E/2$  (so weit wie nötig). Wie muss sich der Entwicklungskoeffizient zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Teilchenzahl  $N$  verhalten? (Hinweis:  $S$  ist eine extensive Größe und damit eine homogene Funktion 1. Grades)
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des Ausdrucks für  $S$  aus (a) und der Boltzmann'schen Definition der Entropie die Wahrscheinlichkeit, dass System 1 die Energie  $E_1$  (und System 2 die Energie  $E_2 = E - E_1$ ) aufweist. Zeigen Sie, dass für die relativen Fluktuationen

$$\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{1}{N^\alpha},$$

gilt. Welchen Wert hat  $\alpha$ ?

**S Aufgabe 27 (5 Punkte):** *Entropiezunahme durch Diffusion*

Ist das Konzentrationsprofil einer Lösung in einem abgeschlossenen Behälter nicht homogen, dann ist die Entropie des Systems nicht maximal und damit auch die freie Energie nicht im Minimum. Folglich wird diese „Ordnung“ durch Diffusion beseitigt werden und sich letztlich ein homogenes Profil einstellen.

Für die Entropiedichte  $s = S/V$  verdünnter Lösungen gilt dieselbe Beziehung wie für ein ideales Gas,

$$s = -k_B c \ln \frac{c}{c^*}.$$

- (a) Wie lautet allgemein die Gesamtentropie  $S(t)$  einer verdünnten Lösung mit inhomogenem Konzentrationsprofil  $c(\mathbf{r}, t)$ ? Berechnen Sie dazu  $S(t)$  als Volumenintegral von  $s$ . Was ergibt sich daraus für die zeitliche Änderung der Entropie  $\frac{dS(t)}{dt}$ ?
- (b) Nehmen Sie an, dass das Konzentrationsprofil nur in  $x$ -Richtung inhomogen ist, d. h.  $c(\mathbf{r}, t) = c(x, t)$ . Verwenden Sie die Diffusionsgleichung, um das Vorzeichen von  $\frac{dS(t)}{dt}$  zu bestimmen. Was bedeutet dieses Vorzeichen für die Entropieproduktion durch Diffusion?