

Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)  
Dr. Jérôme Burelbach (Sprechstunde: Mo 14:00-15:00 in EW 708)

## 9. Übungsblatt – Biologische Physik

**Abgabe/Vorrechnen: Mi. 20.06.2018 in der Übung**

**S Aufgabe 28 (10 Punkte): Entropie und chemisches Potential des idealen Gases**

- (a) Sei  $\Omega(U)$  die Anzahl der Mikrozustände mit Energie  $U$  für ein Gas  $N$  nicht wechselwirkender Teilchen im Volumen  $V$ . Zeigen Sie, dass für die Entropie des idealen Gases die Sackur-Tetrode-Formel gilt:

$$S(U) = k_B \ln \Omega(U) = Nk_B \left( \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{4\pi m U}{3N h^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{5}{2} \right).$$

Hinweis 1: Das Volumen einer Hypersphäre in Dimension  $d$  mit Radius  $r$  ist:

$$V_d(r) = \frac{\pi^{d/2}}{(\frac{d}{2})!} r^d.$$

Hinweis 2: Verwenden Sie die Stirling Formel:  $\ln N! \approx N \ln N - N$  bzw.  $N! \approx N^N e^{-N}$ .

- (b) Leiten Sie die thermische Zustandsgleichung sowie die kalorische Zustandsgleichung (Gleichverteilungssatz) des idealen Gases her.

Die Sackur-Tetrode-Formel gilt näherungsweise auch für verdünnte Lösungen. Es ist dabei zu beachten, dass es sich bei  $U$  nur um **kinetische** Energie handelt.

Wir betrachten nun den Fall, dass die Teilchenzahl nicht konstant ist (z. B. auf Grund chemischer Reaktionen) und dass jedes der  $N$  Teilchen noch eine zusätzliche innere Energie  $\epsilon$  besitzt. Für das chemische Potential

$$\mu = -T \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{U_{ges}, V}$$

ist entscheidend, dass die **Gesamtenergie**  $U_{ges}$  festgehalten wird, die den Beitrag  $N\epsilon$  der inneren Energien aller Teilchen einschließt.

- (c) Bestimmen Sie das chemische Potential  $\mu$  des Systems in Abhängigkeit von der Konzentration  $c = N/V$  und der Temperatur  $T$ . Hinweis: Das Ergebnis besitzt die Form

$$\mu(c, T) = kT \ln c/c_0 + \mu_0(T),$$

wobei  $c_0$  eine frei definierbare Referenzkonzentration ist. Welche Bedeutung hat  $\mu_0(T)$ ?

Hinweis: Fassen Sie die kinetische Energie als Funktion der Gesamtenergie und der Teilchenzahlenergie auf.

9. Übung BP SS18

**M Aufgabe 29:** *Poisson-Boltzmann* → *Gouy-Chapman*

Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte Platte, die mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  elektrisch geladen ist. Vor der Platte befindet sich eine Elektrolyt-Lösung mit positiven und negativen Ionen, deren Konzentration im Unendlichen  $c_\infty$  sei. Nach der Poisson-Boltzmann-Theorie ist das elektrostatische Potential im Abstand  $x$  von der Platte durch

$$\bar{V}(x) \equiv \frac{eV(x)}{kT} = -2 \ln \frac{1 + e^{-(x+x_*)/\lambda_D}}{1 - e^{-(x+x_*)/\lambda_D}}$$

gegeben, wobei

$$e^{x_*/\lambda_D} = \frac{e}{2\pi l_B \lambda_D \sigma} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2\pi l_B \lambda_D \sigma}{e} \right)^2} \right).$$

Hierbei ist  $l_B = e^2/4\pi\epsilon_0\epsilon_r kT$  die Bjerrum-Länge und  $\lambda_D = (8\pi l_B c_\infty)^{-1/2}$  die Debye-Länge. Der Effekt von hinzugefügtem Salz ist, dass es bei Abständen größer als die Debye-Länge die Ladung der Platte abschirmt. Für Abstände kleiner als  $\lambda_D$  macht sich das Salz hingegen kaum bemerkbar, so dass sich in dem Fall das Gouy-Chapman-Resultat ergeben sollte.

- (a) Zeigen Sie, dass bei hinreichend kleiner Salzkonzentration, also hinreichend großem  $\lambda_D$

$$e^{-x_*/\lambda_D} \approx 1 - \frac{x_0}{\lambda_D}, \quad \text{wobei} \quad x_0 = e/2\pi l_B \sigma$$

gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass das Potential  $\bar{V}(x)$  damit in das Gouy-Chapman-Resultat (plus eine Konstante) übergeht:

$$\bar{V}(x) = 2 \ln \left( 1 + \frac{x}{x_0} \right) + \text{const.}$$

**M Aufgabe 30:** *Ladungsdichte zwischen schwach geladenen Platten*

Wir betrachten zwei unendlich ausgedehnte, gleich geladene Platten (Flächenladungsdichte  $\sigma$ ). Der Zwischenraum sei mit Gegenionen gefüllt. Zeigen Sie, dass für schwach geladene Platten die Dichte der Gegenionen im Zwischenraum als konstant angesehen werden kann ( $c_+(x) = c_0$ ) und dass die Ladung der Gegenionen gerade die Ladung auf den Platten neutralisiert.