Vorlesung: Prof. Dr. Kathy Lüdge
Übung: Felix Köster

6. Übungsblatt – Theoretische Physik VI: Nichtlineare Laserdynamik

Abgabe: Mi. 05.12.2018 12:00, in der Übung
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Der Code der Programmieraufgaben kann per E-Mail eingereicht werden. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie Ihre Namen und Matrikelnummern an.

Aufgabe 11 (10 Punkte): *Einschaltverhalten eines Class-B Lasers*

Betrachten Sie folgende Lasergleichungen für die (normierte) elektische Feldintensität $I \equiv |E^2|$ sowie die Ladungsträgerinversion N (vgl. Vorlesung: $N \equiv D - 1$):

$$\dot{I}(t) = I(t)N(t) \tag{1}$$

$$\dot{N}(t) = \frac{1}{T}\Big(J - N(t) - (N(t)+1)I(t)\Big) \tag{2}$$

1. Simulieren Sie den Einschaltvorgang des Lasers numerisch. Wählen Sie dazu $T = 300$, $J = 2$ mit den Anfangsbedingungen $I(0) = 0.01$, $N(0) = -1$. Sie beobachten gedämpfte Schwingungen, die sogenannten Relaxationsoszillationen, bevor das System nach einigen hundert Zeiteinheiten in den Fixpunkt läuft.

2. Wir wollen den Grenzfall großer T (also langsame Ladungsträgerdynamik) betrachten. Vergewissern Sie sich analytisch, dass ein einfacher Übergang zu $T \to \infty$ die Dynamik des Gleichungssystems zerstört. Wir wollen das Gleichungssystem daher umnormieren. Definieren Sie eine neue Zeit $s := t/t_c$, sowie $x := \alpha(I - I^*)$ und $y = \beta(N - N^*)$, wobei $*$ jeweils den Fixpunktwert beschreibt. Es seien $\alpha, \beta, t_c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten nur den Fall $J > 0$.

   Normieren Sie das System so, dass die neue dynamische Gleichung für $x(s)$ parameterfrei ist. Die restlichen Normierungsgrößen müssen so gewählt werden, dass die dynamische Gleichung für $y(s)$ im Grenzfall $T \to \infty$ nicht divergiert.

3. Führen Sie nun im normierten System den Grenzübergang $T \to \infty$ durch. Zeigen Sie, dass das resultierende System konservativ ist, also periodische Lösungen existieren. Schreiben Sie dazu

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \underline{F}(x(s), y(s))\,. \tag{3}$$

   Ein System ist konservativ, falls eine Funktion $C(x, y)$ existiert, sodass

   $$\underline{F} \cdot (\underline{\nabla} C) = 0\,. \tag{4}$$

   Berechnen Sie aus dieser Bedingung $C(x, y)$. Entlang jeder periodischen Lösung ist $C(x, y) \equiv C = const.$ Bestimmen Sie daraus einen parametrischen Ausdruck für die periodischen Lösungen (also z.B. $x(y)$) und plotten Sie diese für verschiedene C. Vergleichen Sie mit dem numerischen Phasenplot des Einschaltvorganges in der (I, N)-Ebene.

   Hinweis: Bestimmen Sie $C(x, y)$ aus Gl.(4) z.B. durch Trennung der Variablen und anschließende Integration.

Bitte Rückseite beachten!⟶

6. Übung TPVI: Nichtlineare Laserdynamik, SS 18

Aufgabe 12 (10 Punkte): *Van-der-Pol-Oszillator: Asymptotische Analyse*

Betrachten Sie den Van-der-Pol-Oszillator in mean-field-Näherung mit zeitverzögerter Pyragas-Kontrolle:

$$\ddot{x} - \tilde{\varepsilon}\dot{x} + \omega_0^2 x - K\left[\dot{x}(t-\tau) - \dot{x}(t)\right] = 0\,, \tag{5}$$

mit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das Verhalten nahe der Hopf-Bifurkation, $\tilde{\varepsilon} < 0$, $|\tilde{\varepsilon}| \ll 1$.

1. Zeigen Sie, dass im Fall $K = 0$ die Eigenwerte des um den Fixpunkt linearisierten Systems gegeben sind durch
$$\lambda^{K=0} \approx \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \pm i\omega_0\,.$$
2. Für $K > 0$ ist die charakteristische Gleichung nicht analytisch lösbar. Führen Sie eine asymptotische Analyse durch, indem sie den Eigenwert wie folgt entwickeln:
$$\lambda \equiv p + iq + i\omega_0\,.$$
Hier sind $p, q \in \mathbb{R}$ kleine Entwicklungsparameter. Es gelten also folgende Abschätzungen:
$$|\tilde{\varepsilon}| \ll 1 \qquad\qquad |p| \ll 1 \qquad\qquad |q| \ll 1\,.$$
Wir beschränken uns auf resonante Rückkopplung, d.h., $\tau = n\frac{2\pi}{\omega_0}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Eigenwerte des Van-der-Pol-Oszillators in Abhängigkeit von K und τ. Vernachlässigen Sie dabei alle Terme von höherer als erster Ordnung in den kleinen Parametern (also z.B. p^2, aber auch pq).
3. Berechnen Sie numerisch die Real- und Imaginärteile der Eigenwerte für $\tilde{\varepsilon} = -0.01$, $K = 0.2$, $\omega_0 = 2\pi$ in Abhängigkeit von τ. Tragen Sie die analytisch genäherten Werte bei resonanten τ-Werten ein und vergleichen sie die genäherte und numerische Lösung an diesen Stellen.

   Hinweis: Es existieren unendlich viele Eigenwerte. Plotten Sie nur einige Eigenwerte mit den jeweils größten Realteilen.

`Vorlesung:`	• Montag 12:00 Uhr – 14:00 Uhr im **EW 202**. • Mittwoch 10:00 Uhr – 12:00 Uhr im **EW 203**.
`Übung:`	• Mittwoch, 12:00 – 14:00 Uhr im EW 731.
`Webseiten:`	• Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ws_201819/wahlpflichtveranstaltungen/ndk161/`
`Scheinkriterien:`	• Mindestens 50% der Übungspunkte. (Abgabe in Dreiergruppen). • Regelmäßige und aktive Teilnahme in der Übung.
`Kontakte:`	• Prof. Dr. Kathy Lüdge, EW 741, 314-23002, `kathy.luedge@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Do. 14:00-15:00. • Felix Köster, EW 629, 314-24254, `f.koester@tu-berlin.de`, Sprechzeiten Mo. 13:30-14:30