Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

1. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 30.04.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 1 (8 Punkte): *δ-Distribution*

Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{1}$$

Man stellt sie als **Grenzwert** einer **Funktionenschar** g_ϵ dar. Um zu überprüfen, dass eine solche Schar eine Darstellung der δ-Distribution ist, reicht es dann zu zeigen, dass im Grenzwert die Bedingung (1) erfüllt ist.
Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine δ-Distribution darzustellen. Eine davon soll in dieser Aufgabe näher betrachtet werden.

(a) Zeigen Sie, dass durch folgende Funktionenschar im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die δ-Distribution gegeben ist:

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Tipp: Benutzen Sie die Substitution $y = \frac{x}{\epsilon}$. Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

(b) Zeigen Sie, dass für Funktionen f, die differenzierbar sind und im Unendlichen verschwinden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} -f'(x) dx \tag{2}$$

gilt. Zeigen Sie dies (a) durch direktes Überprüfen der definierenden Gleichung (1) und (b) durch partielle Integration mit Hilfe der Darstellung durch die Schar g_ϵ. *Tipp:* Benutzen Sie als Stammfunktion $G_\epsilon(x)$ von $g_\epsilon(x)$ mit

$$G_\epsilon(x) = \frac{\arctan(x/\epsilon)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

und zeigen Sie, dass die Schar der Stammfunktionen $G_\epsilon(x)$ von g_ϵ gegen die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

konvergiert (aus diesem Grunde wird diese Funktion dann auch als Stammfunktion der δ-Distribution bezeichnet).

Aufgabe 2 (12 Punkte): *Fouriertransformation*

Die Fourier-Transformation bildet eine große Klasse von Funktionen $f(x)$ auf andere Funktionen $\tilde{f}(k)$ ab. Sie bewirkt dabei einen Darstellungswechsel zwischen den Variablen x und k. Anschaulich kann man die Fourier-Transformation als eine Zerlegung der Funktion $f(x)$ in (ebene) Wellen ansehen. Die Funktion $\tilde{f}(k)$ gibt dabei die Amplitude der zur Wellenzahl k gehörenden Welle an. Da ebene Wellen in vielen physikalischen Theorien einfache Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind, findet die Fourier-Transformation zahlreiche Anwendungen. Die Definition

1. Übung TPII SS18

der Fourier-Transformation lautet (Vorfaktoren können variieren):

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= FT(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
f(x) &= FT^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk
\end{aligned}
$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

(b) Seien $\tilde{f}_1(k)$ und $\tilde{f}_2(k)$ die Fourier-Transformierten der Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$:

$$
\tilde{f}_{1,2}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f_{1,2}(x) dx.
$$

Wie lautet die Fourier–Transformierte $\tilde{g}(k)$ des Produktes $g(x) = f_1(x) f_2(x)$?

(c) Berechnen Sie die Fourier–Transformierten der Funktionen

a) $f(x) = e^{-|x|}$, b) $f(x) = e^{-x^2/\Delta^2}$.

(d) Zeigen Sie, dass für jede quadratintegrable Funktion $f(x)$ die Beziehung (Parseval)

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk
$$

gültig ist.

Vorlesung:

- Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
- Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Klausurtermin:

- Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.

Sprechstunden:

- Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707)
- Dr. Alexander Carmele: Di 11:00 – 12:00 Uhr (EW 704)
- Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060)
- Dr. Benjamin Lingnau: Mi 13:00 – 14:00 Uhr (EW 629)
- Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060)
- Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984