Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

3. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Abgabe bitte in 3er Gruppen – keine Einzelabgabe. Mo. 14.05.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 5 (8 Punkte): *Impulsdarstellung*

In der Vorlesung wurde der Impulsoperator in Ortsdarstellung über die Invarianz des Erwartungswerts unter Basiswechsel hergeleitet. Für den Erwartungswert eines Operators $\hat{F}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ ergibt sich im Ortsraum die Form $\langle \hat{F} \rangle = \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}, t) F(\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{r}}) \psi(\mathbf{r}, t)$.

(a) Leiten Sie hier analog zur VL den Ortsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ in der Impulsdarstellung her.

(b) Stellen Sie die Schrödinger-Gleichung (mit Potential $V(\mathbf{r})$) in Impulsdarstellung, also für die Wellenfunktion $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, t)$, auf.

(c) Wie sieht die zugehörige stationäre Schrödinger-Gleichung aus?

Aufgabe 6 (9 Punkte): *Nicht-Vertauschbarkeit von linearen Operatoren*

Im Folgenden sollen ein paar wichtige Kommutatoren berechnet werden. Der Impulsoperator in Ortsdarstellung ist dabei gegeben durch $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}}$, während der Ortsoperator in Impulsdarstellung über $\hat{\mathbf{r}} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}$ definiert ist.

(a) Beweisen Sie zuerst die häufig gebrauchte Formel

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[f(\hat{x}_i), \hat{p}_j]$ in der Ortsdarstellung, wobei f eine überall differenzierbare, aber sonst beliebige Funktion ist. Was folgt speziell für $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$?

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[f(\hat{p}_i), \hat{x}_j]$ entweder in der Impulsdarstellung oder darstellungsunabhängig über die Definition von $f(\hat{p})$ über seine Taylor-Entwicklung $f(\hat{p}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \hat{p}^n$. Was ergibt sich für den interessanten Fall $[\hat{\mathbf{p}}^2, x_i]$?

(d) Zeigen Sie, dass für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, für welche die Kommutatoren $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ gelten, folgende Relation gilt:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2}.$$

Hierbei ist die Exponentialfunktion über $e^{\hat{A}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$ definiert.

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, um zu zeigen, dass die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t^2[\hat{A}, \hat{B}]/2}$ der gleichen linearen DGL 1. Ordnung zu gleichen Anfangsbedingungen gehorchen.

 Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 7 (3 Punkte): *Kontinuitätsgleichung*

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{r},t) = |\psi(\mathbf{r},t)|^2$ gilt, ähnlich wie in der klassischen Elektrodynamik, die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, dass die Wahrscheinlichkeit erhalten ist, d.h. dass aus der Normierungsbedingung $\int d^3r |\psi(\mathbf{r}, t=0)|^2 = 1$ folgt $\int d^3r |\psi(\mathbf{r},t)|^2 = 1$. Nehmen Sie dabei an, dass die Stromdichte hinreichend schnell abfällt, d.h. $jr^2 \to 0$ für $r \to \infty$.

(b) Berechnen Sie für eine auf das Volumen V normierte ebene Welle die Wahrscheinlichkeits-Stromdichte und führen Sie diese auf die anschauliche Form $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ zurück.

Vorlesung:	• Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202 • Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausurtermin:	• Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.
Sprechstunden:	• Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707) • Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704) • Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060) • Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629) • Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060) • Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984