Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 30. Mai 2018
http://www.tu-berlin.de/?qm18

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 04.06.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 12 (4 Punkte): *Operatoreigenschaften*

Der zu $\hat{A}$ adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger$ ist wie in der Vorlesung durch $\langle\phi|\hat{A}\psi\rangle = \langle\hat{A}^\dagger\phi|\psi\rangle$ (für alle $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$) definiert. Zeigen Sie damit für zwei Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ folgende Relationen:

(a) $(\lambda\hat{A})^\dagger = \lambda^*\hat{A}^\dagger$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

(b) $(\hat{A}+\hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$

(c) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$

(d) Falls für die zwei Operatoren $[\hat{A},\hat{B}] = i\mathbf{1}$ gilt, so folgt: $[\hat{A},\hat{B}^n] = in\hat{B}^{n-1}$.

Aufgabe 13 (6 Punkte): *Eigenzustände*

Zeigen Sie folgende Aussagen über Systeme von Eigenzuständen:

(a) Zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauschen genau dann, wenn sie einen gemeinsamen Satz von nicht-entarteten Eigenzuständen $\{|c_n\rangle\}$ besitzen, d.h.

$$[\hat{A},\hat{B}] = 0 \Leftrightarrow \exists\, a_n, b_n \in \mathbb{C} : \hat{A}|c_n\rangle = a_n|c_n\rangle \text{ und } \hat{B}|c_n\rangle = b_n|c_n\rangle$$

(b) Die Streuung eines selbstadjungierten Operators $\hat{A}$ mit nicht-entarteten Eigenwerten,

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2},$$

verschwindet genau dann, wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}$ ist.

Aufgabe 14 (10 Punkte): *Schrödinger Unschärferelation*

Leiten Sie die Schrödinger Unschärfe-Relation für zwei beliebige, jeweils selbstadjungierte Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ her:

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \left(\frac{1}{2}\left\langle\{\hat{A},\hat{B}\}\right\rangle - \left\langle\hat{A}\right\rangle\left\langle\hat{B}\right\rangle\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}\left\langle[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right)^2,$$

wobei $(\Delta\hat{O})^2 = \left\langle(\hat{O} - \left\langle\hat{O}\right\rangle)^2\right\rangle$ und $\{\hat{A},\hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.
(i) Zeigen Sie dafür zunächst die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\langle X|X\rangle\,\langle Y|Y\rangle \geq |\langle X|Y\rangle|^2\,,$$

wobei Sie X, Y geeignet wählen können. (ii) Verwenden Sie (i), um die Schrödinger-Ungleichung herzuleiten. Zeigen Sie dafür, dass das Betragsquadrat einer jeden komplexen Zahl z sich als Summe der Quadrate von Real- und Imaginärteil ausdrücken lässt: $|z|^2 = (\mathrm{Re}[z])^2 + (\mathrm{Im}[z])^2$, und verwenden Sie dies, um die gewünschte Form zu erhalten.
(iii) Zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Ungleichung in die Form der Heisenberg-Unschärferelation bringen lässt, und setzen Sie dafür $\hat{A} = \hat{x}$ und $\hat{B} = \hat{p}_x$.

Vorlesung:
- Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
- Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Klausurtermin:
- Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.

Sprechstunden:
- Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707)
- Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704)
- Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060)
- Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629)
- Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060)
- Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)

Literatur zur Lehrveranstaltung:
- Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)
- Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984