

Prof. Dr. Sabine Klapp
Dr. Alexander Carmele, Philip Knospe, Dr. Benjamin Lingnau, Ché Netzer, Arne Zantop

8. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik

Abgabe: Mo. 18.06.2018 bis 18:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Aufgabe 17 (12 Punkte): *Glauber-Zustände des harmonischen Oszillators*

Ein Glauber-Zustand $|\alpha\rangle$ (benannt nach Roy J. Glauber, dem Nobel-Preisträger für Physik des Jahres 2005, auch kohärenter Zustand genannt) ist definiert durch

$$|\alpha\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Hier ist $C \in \mathbb{C}$ eine Normierungskonstante und $|n\rangle$ bezeichnet den Eigenzustand des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$ des harmonischen Oszillators,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} \hat{x}^2 = \hbar\omega_0 \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right).$$

Dabei gelten für die Erzeuger- und Vernichterooperatoren folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), & \hat{p} &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\hbar m \omega_0}{2}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger), \\ [\hat{N}, \hat{b}] &= -\hat{b}, & [\hat{N}, \hat{b}^\dagger] &= \hat{b}^\dagger, & [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] &= 1. \end{aligned}$$

- (a) Berechnen Sie die Normierungskonstante C des Glauber-Zustands $|\alpha\rangle$.
- (b) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ Eigenzustand des Vernichtungsoperators \hat{b} ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- (c) Leiten Sie mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems Bewegungsgleichungen für die Orts- und Impulserwartungswerte eines Glauber-Zustands her. Lösen Sie diese Bewegungsgleichungen, d.h.: Berechnen Sie $\langle \hat{x} \rangle(t)$ und $\langle \hat{p} \rangle(t)$ für die Anfangsbedingungen $\langle \hat{x} \rangle(0) = \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle(0) = \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$.
Hinweis: Drücken Sie \hat{x} , \hat{p} durch \hat{b} und \hat{b}^\dagger aus und verwenden Sie die Kommutatorrelationen mit \hat{N} .
- (d) Bestimmen Sie das Unschärfeprodukt $\Delta \hat{x} \cdot \Delta \hat{p}$ für einen Glauber-Zustand. Interpretieren Sie den Wert des Unschärfeprodukts.
Hinweis: Berechnen Sie die Erwartungswerte von \hat{x} , \hat{p} , \hat{x}^2 und \hat{p}^2 für einen Glauber-Zustand. Verwenden Sie dazu die Eigenwertgleichung aus (b).
- (e) Die relative Fluktuation einer Observablen \hat{A} ist definiert durch $\frac{\Delta \hat{A}}{\langle \hat{A} \rangle}$. Bestimmen Sie die relative Fluktuation von Ort und Impuls eines Glauber-Zustands. Wie verhalten sich die relativen Fluktuationen beim Übergang zu einem makroskopischen Oszillator?

8. Übung TPII SS18

Aufgabe 18 (8 Punkte): *Dynamik/Bilder in der Quantenmechanik*

- (a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für die quantenmechanischen Erwartungswerte forminvariant sind, d.h. dass im Schrödinger-, Heisenberg- und Dirac-Bild gilt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \langle [\hat{O}, \hat{H}] \rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{O}}{\partial t} \right\rangle.$$

- (b) Berechnen Sie für den Hamiltonoperator ($\Omega \in \mathbb{R}$)

$$\hat{H} = \Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i/\hbar(t-t_0)\hat{H}}$. Berechnen Sie für den Anfangszustand $|\psi(t_0)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_L \\ \alpha_R \end{pmatrix}$ ($\alpha_L, \alpha_R \in \mathbb{C}$) die Zeitdynamik $|\psi(t \geq t_0)\rangle$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none">• Dienstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202• Mittwoch 8:15 Uhr – 9:45 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte.• Bestandene Klausur.• Regelmässige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Klausurtermin:	<ul style="list-style-type: none">• Die Klausur findet am Dienstag, den 10.07.2018 von 8:00-10:00 Uhr statt. Raum: H0104.
Sprechstunden:	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. S. Klapp: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 707)• Dr. Alexander Carmele: Di 13:15 – 14:00 Uhr (EW 704)• Philipp Knospe: Mi 11:00 – 12:00 Uhr (EW 060)• Dr. Benjamin Lingnau: Mo 15:30 – 16:30 Uhr (EW 629)• Che Netzer: Mi 15:00 – 16:00 Uhr (EW 060)• Arne Zantop: Fr 10:00 – 11:00 Uhr (EW 711)
Literatur zur Lehrveranstaltung:	<ul style="list-style-type: none">• Albert Messiah, Quantenmechanik (I/II), Walter de Gruyter, Berlin 1991• W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1 & 5/2 (Springer, 2002)• Eugen Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, 5. Auflage, Aula-Verlag, Wiesbaden 1984