PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

10. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Di. 17.07.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 21 (20 Punkte): *Feedback control of quantum transport*

As explored by Prof. Brandes in *Phys. Rev. Lett.* **105**, 060602 (2010), it is possible to freeze the growth of noise of quantum transport by means of measurement and feedback. For the paradigmatic example of unidirectional transport through a tunnel junction with no internal degrees of freedom, the master equation conditioned to the number n of tunneled electrons has the form

$$\dot{\rho}^{(n)}(t) = \mathcal{L}^0_{(n)}(t)\rho^{(n)}(t) + \mathcal{J}_{(n-1)}(t)\rho^{(n-1)}(t), \tag{1}$$

where the jump and Liouville coefficients $\mathcal{L}^0_{(n)}(t) = -\mathcal{J}_{(n)}(t) = -\Gamma f(q_n(t))$ have been made dependent on the measurement outcome n by means of the auxiliary function $f(q_n(t))$, with

$$q_n(t) \equiv I_0 t - n, \tag{2}$$

and $f(0) = 1$. This modulates the bare tunneling rate of electrons through the junctions Γ multiplicatively proportionally to the deviation of the transported charge n with respect to the average value without feedback $I_0 t$. Let us consider linear feedback, i.e. $f(x) = 1 + gx$, where the positive feedback strength $g \ll 1$ compensates large charge fluctuations by a modulation of the average current I_0.

1. (5) Calculate the average current with feedback

   $$C_1(t) \equiv \langle n \rangle_t = \Gamma t, \tag{3}$$

   and the variance

   $$C_2(t) \equiv \langle n^2 \rangle_t - \langle n \rangle_t^2 = \frac{1}{2g}\left(1 - e^{-2g\Gamma t}\right), \tag{4}$$

   directly from their definitions.

2. (5) By using the definition $\rho(\chi, t) \equiv \sum_n \rho^{(n)}(t) e^{i\chi n}$, transform the master equation (1) into the partial differential equation

   $$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\chi, t) = \mathcal{L}(\chi, t) f\left(I_0 t - \frac{\partial}{\partial i\chi}\right)\rho(\chi, t) \tag{5}$$

   and find the form of $\mathcal{L}(\chi, t)$.

3. (5) Show that the cumulant generating function $\mathcal{F}(\chi, t) \equiv \ln \rho(\chi, t)$ has the form

   $$\mathcal{F}(\chi, t) = I_0 t i\chi + \frac{1}{g}\ln\left[e^{i\chi}\left(1 - e^{-g\Gamma t}\right) + e^{-g\Gamma t}\right] + \frac{1}{g}\left[Li_2\left((1 - e^{-i\chi})e^{-g\Gamma t}\right) - Li_2\left(1 - e^{-i\chi}\right)\right],$$

   where $Li_2(z) \equiv \int_z^0 \frac{dt}{t}\ln(1 - t)$.

4. (5) Show that the long-time form of $k \geq 2$ cumulants is

   $$C_k(t \to \infty) = -\frac{1}{g}B_{k-1} \tag{6}$$

   where the $B_k \equiv \left.\frac{d^k}{dx^k}\frac{x}{e^x - 1}\right|_{x=0}$ are the kth Bernoulli-Seki numbers.

Bitte Rückseite beachten!⟶

10. Übung TFP SS18

Aufgabe 22 (10 Punkte): *BONUS AUFGABE: Landau-Niveaus, Randkanäle*

Sei ein 2D-Gas freier Elektronen in der xy-Ebene binnen einem senkrechten magnetischen Feld, dessen Eichung einen Ausdruck des Vektorpotenzials $A_x = -By$ und $A_y = A_z = 0$ ermöglicht. Bestimmen Sie die Eigenzustände und die Energien dieses Systems. Führen diese Zustände einen Strom?

Mittels eines Potenziales $U(y)$ seien die Elektronen in der y-Richtung begrenzt. Nehmen Sie an, dass der Potenzial in Bezug auf der y-Variation der oberen Wellenfunktionen langsam variiert. Benutzen Sie eine erste-Ordnung Störungstheorie um einen Ausdrück der Dispersion und der Gruppengeschwindigkeit als Funktion der Koordinate y herzuleiten. Erklären Sie damit die Entstehung von Randkanäle im Quanten-Hall-Effekt.