PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

3. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Di. 22.05.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.
Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 7 (12 Punkte): *Elastische Medien*

Die Lagrange-Dichte eines isotropen elastischen Mediums lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\lambda_L\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} + 2\mu_L\epsilon_{ij}^2\right),$$

- Identifizieren Sie die Konstanten λ_L und μ_L als Funktion der dynamischen Matrix D und definieren Sie den Verzerrungstensor ϵ_{ij}.
- Aus den zugehörenden Euler-Lagrange-Gleichungen, zeigen Sie, dass die oben genannte Lagrange-Dichte die folgenden Bewegungsgleichungen generiert

  $$\rho_M\ddot{u}_k = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_l}\sigma_{kl}.$$

  Leiten Sie einen Ausdruck für den Spannungstensor σ her.
- Leiten Sie die folgende alternative Form der Bewegungsgleichungen her

  $$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2\nabla^2\mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}),$$

  wo c_t die transversale und c_l die longitudinale Schallgeschwindigkeit sind.
- Seien $\phi(\mathbf{r},t)$ und $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t)$ ein Skalar- bzw. Vectorpotenzial, zeigen Sie, dass der Ansatz $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \nabla\phi(\mathbf{r},t) + \nabla\times\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t)$, die Gleichung oben erfüllt, vorausgesetzt, dass die Potenziale Lösungen der Wellengleichungen

  $$\ddot{\phi} - c_l^2\nabla^2\phi = 0; \qquad \ddot{\boldsymbol{\psi}} - c_t^2\nabla^2\boldsymbol{\psi} = 0,$$

  sind, mit $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi} = 0$.

Aufgabe 8 (8 Punkte): *Thermodynamik von Fraktalen*
Wir betrachten folgendes Energiespektrum als Approximation eines fraktalen Energiespektrums (Cantor-Menge):

$$E_n = c_1/3 + c_2/3^2 + c_3/3^3 + \ldots + c_n/3^n,$$

wobei c_k die Werte 0 oder 2 annehmen soll. Ein Mikrozustand ist dann durch Angabe von $c_1, c_2, \ldots, c_n$ definiert.

- Berechnen Sie für dieses System einen Ausdruck für die kanonische Zustandssumme und die spezifische Wärme C_v bei der Temperatur T.
- Berechnen Sie damit $C_v(T)$ numerisch für $n = 1$, $n = 5$, $n = 10$ und zeigen Sie so, dass $C_v(T \to 0)$ für grosse n um die Haussdorff-Dimension der Cantor-Menge oszilliert.