

PD Dr. Gernot Schaller
Dr. Javier Cerrillo

7. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

Abgabe: Di. 19.06.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 15 (10 Punkte): Verschiebungs-Operator

Kohärente Zustände werden durch eine α -Verschiebung des Vakuum-Zustandes definiert. Der Verschiebungs-Operator für eine Mode wird durch $D(\alpha) \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ definiert, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Zeigen Sie, dass der Produkt zweier Verschiebungs-Operatoren

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha + \beta)e^{i\Im(\alpha\beta^*)}.$$

genügt.

- Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Operatoren \hat{x} und \hat{p} für einen kohärenten Zustand mit der Frequenz des Modes Ω oszilliert.
- Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Verschiebungs-Operators im thermischen Gleichgewicht

$$\langle D(\alpha) \rangle_{\text{eq}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 \coth(\frac{\beta\Omega}{2})},$$

lautet.

Dafür sind Laguerre-Polynome und ihre erzeugende Funktion hilfreich.

Aufgabe 16 (10 Punkte): Polarontransformation

Wir studieren die Polarontransformation in einem Spin-Boson Modell

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{e-p} + \mathcal{H}_p \equiv \varepsilon J_z + J_z \sum_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}} + a_{-\mathbf{q}}^\dagger) + \sum_{\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{q}}.$$

Hierbei ist der kollektive (Pseudo-Spin)-Operator $\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_i^N \boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ mit den Vektoren der Pauli (Pseudo)-Spinmatrizen von N (Pseudo)-Spins. Die Komponente in z -Richtung ist beispielsweise $J_z \equiv \frac{1}{2} \sum_i^N \sigma_z^{(i)}$.

a) Zeige, dass mit $S \equiv J_z \sum_{\mathbf{q}} \frac{g_{\mathbf{q}}}{\omega_{\mathbf{q}}} (a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{-\mathbf{q}})$ der Polaron-transformierte Hamiltonian die Form

$$\mathcal{H}' \equiv e^S \mathcal{H} e^{-S} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_p - \kappa J_z^2$$

hat. Berechne die Konstante κ und drücke sie durch eine geeignete phononische Spektraldichte aus. Interpretiere und diskutiere das Ergebnis für \mathcal{H}' , insbesondere auch im Hinblick auf die effektive Wechselwirkung der Elektronen in Supraleitern.

b) Wie transformiert sich der Operator J_y unter der Polaron-Transformation?