

PD Dr. Gernot Schaller  
Dr. Javier Cerrillo

## 8. Übungsblatt – Theoretische Festkörperphysik I,II

**Abgabe: Di. 03.07.2018 um 14:00 Uhr beim Tutorium.**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

### Aufgabe 17 (6 Punkte): BCS Theorie

a) Normalisieren Sie die Variations-Wellenfunktion  $|\Psi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k}} e^{g_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle$  damit sie die Form

$$(1) \quad |\Psi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left( \sin \theta_{\mathbf{k}} + \cos \theta_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle$$

einnimmt.

b) Leiten Sie den Ausdruck

$$(2) \quad \langle \Psi_0 | \mathcal{H}_{\text{BCS}} | \Psi_0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} 2\epsilon_{\mathbf{k}} \cos^2 \theta_{\mathbf{k}} + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sin 2\theta_{\mathbf{k}} \sin 2\theta_{\mathbf{k}'}$$

für den Erwartungswert der Grundzustandsenergie mit der BCS-Wellenfunktion (1) her.

c) Benutzen Sie (2) und zeigen Sie, dass für schwache Kopplung ( $N(0)V_0 \ll 1$ ) der Erwartungswert der Energie im BCS-Zustand um

$$(3) \quad E_s - E_n \approx -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2$$

gegenüber der Grundzustandsenergie des normalen Fermigasens abgesenkt ist. Hinweis: Machen Sie sich klar, welche  $\mathbf{k}$ -Vektoren zur Summe beitragen. Eine Skizze der Funktion  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  in der Nähe von  $k_F$  ist nützlich.

### Aufgabe 18 (7 Punkte): Bogoliubov-Transformation

Der mean-field Hamiltonian  $\mathcal{H}_{\text{BCS}}^{(MF)}$  der BCS-Theorie ist quadratisch in den fermionischen Erzeugern und Vernichtern (Vorlesung) und kann deshalb durch eine unitäre Transformation (**Bogoliubov-Transformation**) diagonalisiert werden. Berechnen Sie diese Transformation und den resultierenden diagonalen Hamiltonian explizit.

### Aufgabe 19 (7 Punkte): Kritische Temperatur

Leiten Sie den Zusammenhang

$$(4) \quad \frac{2\Delta(T=0)}{T_c} = \frac{2\pi}{e^c}$$

zwischen dem Gap des Supraleiters bei Temperatur  $T = 0$  und seiner kritischen Temperatur  $T_c$  ausführlich und explizit her. Welche Näherungen werden hier gemacht?