Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 12. Juni 2019
https://www.tu-berlin.de/?203636

Prof. Dr. Holger Stark, Arne Zantop, Josua Grawitter
Isaac Tesfaye, Jonah Friederich, Lasse Ermoneit, Philip Knospe

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Termine: **S** **Abgabe bis Mittwoch, 26.06.2019, 18 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang**
M **Vorrechnen in den Tutorien 17.06. – 21.06.2019**

Achtung: Anmeldung bis 28.06.2019 in tuPORT (siehe Rückseite)! Sonst kein Schein!

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte. Bitte die Matrikelnummern auf dem Aufgabenzettel angeben. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

M **Aufgabe 33 (2 Punkte)**: *Ableitungsregeln (mündlich)*
Zeigen Sie für den Nablaoperator in *kartesischen* Koordinaten $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ folgende Regeln:

(a) Gegeben sind die Skalarfelder $U, V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $$\nabla(aU + bV) = a\nabla U + b\nabla V \qquad \text{(Linearität)}$$

(ii) $$\nabla(UV) = (\nabla U)V + U\nabla(V) \qquad \text{(Leibnizregel)}$$

(b) Es sei $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor, $\underline{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor mit Länge $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und Richtung $\underline{e}_r = \underline{r}/r$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\text{(i) } \nabla(\underline{a} \cdot \underline{r}) = \underline{a}, \qquad \text{(ii) } \nabla r = \underline{e}_r \qquad \text{und} \qquad \text{(iii) } \nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\,\underline{e}_r.$$

M **Aufgabe 34 (2 Punkte)**: *konservative Kräfte (mündlich)*
Berechnen Sie die Kräfte $\underline{F} = -\nabla\phi$ zu folgenden Potentialen:

(a) Die langreichweitigen Potentiale

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{r^n}, \qquad \phi_2(x, y, z) = \ln(r),$$

(b) sowie das abgeschirmte Coulombpotential und die ebene Welle

$$\phi_3(x, y, z) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-kr}, \qquad \phi_4(x, y, z) = \sin(\underline{k} \cdot \underline{r}).$$

Hinweis: Hierbei ist $\underline{r} = (x, y, z)^T$ der Ortsvektor mit Länge $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

S **Aufgabe 35 (20 Punkte):** *Nablaoperator (schriftlich) (10+2+8 Punkte)*
In der Vorlesung wurde in Gleichung (6.23) der Nablaoperator als Vektordifferentialoperator in beliebigen, lokal rechtwinkligen Koordinaten eingeführt.

(a) Leiten Sie den Nablaoperator in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) her.

(b) Bestimmen Sie damit die folgenden Gradienten in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ):

$$\text{(i) } \nabla r \quad \text{und} \quad \text{(ii) } \nabla f(r).$$

Hinweis: Hierbei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Länge eines Ortsvektors $\underline{r} = (x, y, z)^T$.

Betrachten Sie nun das Potential eines (elektrischen) Dipols in $\mathbb{R}^3$, das gegeben ist durch:

$$U(r, \vartheta) = \frac{p\cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Bitte Rückseite beachten! ⟶

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\underline{E} = -\nabla U$ und dessen Betrag $|\underline{E}|$. Mit welchem Exponenten nimmt $|\underline{E}|$ mit dem Abstand vom Dipol ab und für welche Winkel ϑ ist $|\underline{E}|$ minimal bzw. maximal? *Hinweis:* p und ϵ_0 sind positive Konstanten.

Sprechzeiten:

Prof. Dr. Holger Stark	Fr	11:30 – 12:30 Uhr	EW 709
Jonah Friederich	Mo	13:00 – 14:00 Uhr	EW 060
Arne Zantop	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
Josua Grawitter	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
Isaac Tesfaye	Mi	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
Philip Knospe	Do	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
Lasse Ermoneit	Fr	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060

Vorlesung:

- Donnerstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201

Webseite:

- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.tu-berlin.de/?203636`

Klausurkriterien:

- **Anmeldung bis 28.06.2019** unter `https://tuport.sap.tu-berlin.de/` (Anleitung unter `http://pilot.sap.tu-berlin.de/#Materialien`)
- mindestens 50 % der schriftlichen Übungspunkte **S**
- mindestens 50 % der mündlichen Übungspunkte **M**

Klausur:

- Freitag, den 05.07.2019, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1005

Nachklausur:

- Freitag, den 12.07.2019, von 08:00 – 10:00 Uhr in EB 301
- Teilnahme nur durch Qualifikation in der Klausur oder Prüfungsunfähigkeit am Klausurtermin

Scheinkriterium:

- bestandene Klausur

Bemerkung: Die Übungsaufgaben werden nur als dokumentenechte, handschriftliche, gut lesbare Originale akzeptiert. Wir akzeptieren weder Kopien noch elektronische Abgaben. Aufgaben bitte in Gruppen von drei Personen einreichen.

Literatur zur Lehrveranstaltung:

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart (2000).
- R. Wüst, *Höhere Mathematik für Physiker*, de Gruyter, Berlin (1995).
- G. Berendt und C. Weimar, *Mathematik für Physiker*, Bd. 1 und 2, Akademie-Verlag, Berlin (1983).
- M. L. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Wiley & Sons, Hoboken (2005).
- G. B. Arfken und H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Amsterdam (2005).