Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 22. Mai 2019
https://www.tu-berlin.de/?203636

Prof. Dr. Holger Stark, Arne Zantop, Josua Grawitter
Isaac Tesfaye, Jonah Friederich, Lasse Ermoneit, Philip Knospe

7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Termine: **S** **Abgabe bis Mittwoch, 05.06.2019, 18 Uhr im Briefkasten am ER-Eingang**
M **Vorrechnen in den Tutorien 27.05. – 31.05.2019**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte. Bitte die Matrikelnummern auf dem Aufgabenzettel angeben. Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

M **Aufgabe 22 (2 Punkte)**: *Kugelkoordianten (mündlich)*
Der Ortsvektor $\underline{r}(r,\theta,\varphi)$ der Kugelkoordinaten lautet in der kartesischen Basis:

$$\underline{r}(r,\theta,\varphi) = r\sin(\theta)\cos(\varphi)\,\underline{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\,\underline{e}_y + r\cos(\theta)\,\underline{e}_z.$$

(a) Berechnen Sie die ortsabhängigen Basisvektoren der Kugelkoordinaten $\{\underline{e}_r(\theta,\varphi),\ \underline{e}_\theta(\theta,\varphi),\ \underline{e}_\varphi(\theta,\varphi)\}$ in der kartesischen Basis.

(b) Zeigen Sie allgemein, dass $\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j = \delta_{ij}$ für $i,j\in\{r,\theta,\varphi\}$.

M **Aufgabe 23 (2 Punkte)**: *Legendrepolynome als Eigenvektoren (mündlich)*
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$. Auf diesem Raum definieren wir die lineare Abbildung $\hat{\mathbf{L}}_x : \mathcal{P}^n[-1,1] \to \mathcal{P}^n[-1,1]$,

$$\hat{\mathbf{L}}_x\,p(x) \;:=\; \underbrace{\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]}_{\hat{\mathbf{L}}_x} p(x) \;=\; (x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,p(x) + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,p(x).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für eine differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt, dass

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(xf(x)) \;=\; x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x) + n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}f(x). \tag{24.1}$$

(b) Zeigen Sie nun, dass die Legendrepolynome $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[(x^2-1)^l\right]$ für $l\in\{0,\dots,n\}$ Eigenvektoren von $\hat{\mathbf{L}}_x$ sind (d.h. es gilt $\hat{\mathbf{L}}_x P_l(x) = \lambda_l P_l(x)$). Benutzen Sie dazu Gleichung (24.1). Berechnen Sie außerdem die zugehörigen Eigenwerte λ_l.

S **Aufgabe 24 (10 Punkte):** *Leitfähigkeitstensor (schriftlich) (3+4+3 Punkte)*
Die Stromdichte $\underline{j}$ in einem Metall wird beschrieben durch das Ohmsche Gesetz

$$\underline{j} = \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{E}\,.$$

Hier sind $\underline{\underline{\sigma}}$ der Leitfähigkeitstensor und $\underline{E}$ das elektrische Feld. Experimentell kann der Leitfähigkeitstensor durch drei Messungen bestimmt werden: Dazu wird jeweils in x-, y- oder z-Richtung ein elektrisches Feld angelegt und der auftretende Strom gemessen. Die Messergebnisse lauten:

$$\begin{aligned}
&\text{für } \underline{E} = E_0\underline{e}_x && \Rightarrow && \underline{j} = 4j_0\underline{e}_x + 3j_0\underline{e}_y,\\
&\text{für } \underline{E} = E_0\underline{e}_y && \Rightarrow && \underline{j} = 3j_0\underline{e}_x + 4j_0\underline{e}_y \text{ und}\\
&\text{für } \underline{E} = E_0\underline{e}_z && \Rightarrow && \underline{j} = 5j_0\underline{e}_z\,.
\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Einträge σ_{ij} des Leitfähigkeitstensors.

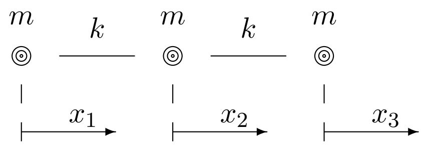
(b) Dieser Tensor kann durch eine Drehung um die z-Achse diagonalisiert werden. Berechnen Sie den entsprechenden Drehwinkel φ.

Bitte Rückseite beachten!⟶

(c) In welche Richtung $\hat{\underline{n}}$ muss man das elektrische Feld $\underline{E} = E_0\hat{\underline{n}}$ legen, damit die Stromdichte maximal wird? Wie groß ist die maximale Stromdichte? *Hinweis:* Betrachten Sie hier die Eigenwerte von $\underline{\underline{\sigma}}$.

S Aufgabe 25 (10 Punkte): *Molekülschwingungen (schriftlich) (3+5+2 Punkte)*
Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte (Masse m), die durch masselose Federn (Federkonstante k) miteinander verbunden sind. Ihre Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + kx_2, \\ m\ddot{x}_2 &= kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \\ m\ddot{x}_3 &= kx_2 - kx_3. \end{aligned}$$



(a) Setzen Sie den *Ansatz* $x_j(t) = a_j \sin(\omega t)$ in die Bewegungsgleichungen ein, so dass Sie ein lineares Gleichungsystem für die a_j erhalten. Schreiben Sie die Gleichungen dann als Eigenwertproblem

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{a} = \omega^2 \underline{a},$$

für eine Matrix $\underline{\underline{M}}$ wobei $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ ein Eigenvektor und ω^2 sein Eigenwert ist.

(b) Berechnen Sie die drei Eigenfrequenzen $\omega^{(\alpha)}$ und ihre jeweiligen Eigenvektoren $\underline{a}^{(\alpha)}$.

(c) Setzen Sie die Ergebnisse aus (b) jeweils in den Ansatz ein und beschreiben Sie die drei *Eigenschwingungen* $x_j^{(\alpha)}(t)$ anhand von Skizzen.

Sprechzeiten:	Prof. Dr. Holger Stark	Fr	11:30 – 12:30 Uhr	EW 709
	Jonah Friederich	Mo	13:00 – 14:00 Uhr	EW 060
	Arne Zantop	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
	Josua Grawitter	Mo	16:00 – 17:00 Uhr	EW 701
	Isaac Tesfaye	Mi	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
	Philip Knospe	Do	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060
	Lasse Ermoneit	Fr	15:00 – 16:00 Uhr	EW 060

Vorlesung:
- Donnerstag 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201

Webseite:
- Details zur Vorlesung, Vorlesungsmitschrift und aktuelle Informationen sowie Sprechzeiten auf der Webseite unter `https://www.tu-berlin.de/?203636`

Klausurkriterien:
- Anmeldung bis 28.06.2019 unter `https://tuport.sap.tu-berlin.de/` (Anleitung unter `http://pilot.sap.tu-berlin.de/#Materialien`)
- mindestens 50 % der schriftlichen Übungspunkte **S**
- mindestens 50 % der mündlichen Übungspunkte **M**

Bemerkung: Die Übungsaufgaben werden nur als dokumentenechte, handschriftliche, gut lesbare Originale akzeptiert. Wir akzeptieren weder Kopien noch elektronische Abgaben. Aufgaben bitte in Gruppen von drei Personen einreichen.